Zusammenfassung MafIA 1

Marcel Schneider
matheschneider@webschneider.org

17. Dezember 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Mengenlehre

1.1 Menge

Eine Zusammenfassung von unterschiedlichen Elementen zu einem Ganzen

1.2 Teilmenge

$$N \subset M \Leftrightarrow M \subset N \tag{1}$$

1.3 Potzenmenge

Sei M eine Menge.
$P(M)$ (auch 2^M):= Menge von allen Teilmengen von M. Sei l die Anzahl der Elemente von M, so ist die Anzahl der Möglichkeiten ist 2^l

1.4 Schnittmenge

$$M \cap N := \{x : x \in M \wedge x \in N\} \tag{2}$$

Die Schnittmenge besteht also aus den gemeinsamen Elementen der beiden Mengen. Falls $M \cap N = \emptyset$ sind, sind M und N *disjunkt*

1.5 Vereinigung

$$M \cup N = \{x : x \in M \vee x \in N\} \tag{3}$$

2 Vektorräume

2.1 Vektorraum

Eine nichtleere Menge V heißt Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$, wenn die folgenden Eigenschaften zutreffen:
Addition

$$\begin{align} (u+v)+w = u+(v+w) & \quad \forall u,v,w \in V \tag{4} \\ u+v = v+u & \quad \forall u,v \in V \tag{5} \\ u+0 = u & \quad \forall u,v \in V \tag{6} \\ v+(-v) = 0 & \quad \forall v \in V \tag{7} \end{align}$$

Skalarmultiplikation:

$$\begin{align} (\alpha \cdot \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v) \tag{8} \\ \alpha \cdot (u+v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v \tag{9} \\ (\alpha \cdot \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v) \tag{10} \\ 1 \cdot v = v \tag{11} \end{align}$$

2.2 Untervektorraum

Sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$. Dann ist $U \subset V$ ein Untervektorraum, wenn gilt:

1. U ist nicht leer, also muss mindestens $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$ gelten.
2. Die Addition muss abgeschlossen sein.
3. Die Skalarmultiplikation muss abgeschlossen sein.

2.3 Kombinationen

Voraussetzungen für die nächsten Definitionen: Seien $v_1, \dots, v_m$ Elemente eines Vektorraums V über einem Skalarenkörper $\mathbb{K}$, und es sei $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ ein m-Tupel aus $\mathbb{K}^m$ für ein $m \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$.

2.3.1 Linearkombination

Eine Linearkombination ist eine Vektroaddition, bei der jeder Vektor einer Menge V zunächst mit einem Skalar α multipliziert wird.

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot v_j$$

2.3.2 Affinkombination

Wenn außerdem gilt, dass die Summe aller Koeffizienten 1 ergibt, also

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j = 1$$

dann spricht man von einer *Affinkombination*.

2.3.3 Konvexkombination

Wenn darüber hinaus $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist und

$$\alpha_j \in [0, 1]\ \forall j, 1 \leq j \leq m$$

gilt, spricht man von einer *Konvexkombination*. Vergleiche zum Verständnis für Konvex die Definition auf Wikipedia[1]

[1] https://de.wikipedia.org/wiki/Konvexe_Menge