Zusammenfassung Diskrete Mathematik

Marcel Schneider Maik Wegener
matheschneider@webschneider.org

20. Januar 2018

Vorwort

Dieses Dokument dient zur kurzen Zusammenfassung der wichtigsten Sätze und Definitionen. Ich füge hier nur nach Lust und Laune Dinge ein, so dass dies in keinster Weise als vollständig oder stets korrekt angesehen werden darf. Die Quelldateien sind öffentlich unter `https://git.webschneider.org/uni/sammlung` einsehbar. Jeder ist dazu aufgerufen, sich an der Entwicklung zu beteiligen!

Inhaltsverzeichnis

1 Abbildungen

Man beachte auch das Mafia-Skript.

1.1 Kompositionen

Kompositionen von Funktionen sind *assoziativ*.

Sei $f : X \to Y$ eine Funktion:

i. f ist injektiv $\leftrightarrow \exists g : Y \to X$, sodass $g \circ f = id_x$

ii. f ist surjektiv $\leftrightarrow \exists g : Y \to X$, sodass $f \circ g = id_y$

iii. f ist bijektiv $\leftrightarrow \exists g : Y \to X$, sodass $g \circ f = id_x, f \circ g = id_y$

1.2 Umkehrfunktion

Seien X, Y Mengen und die Abbildungen $f : X \to Y$ eine Bijektion. Dann gibt es eine eindeutige Funktion $g : Y \to X$ mit $g(y) = x$, wobei $f^{-1}(y) = \{x\}$. Diese wird *Umkehrfunktion* oder *Inverse* von f bezeichnet.

2 Zählen und Kombinatorik

2.1 Schubfachprinzip

Das Schubfachprinzip besagt, wenn m Objekte in n Kategorien (*Schubfächer*) eingeteilt werden, gibt es mindestens eine Kategorie, in der mindestens zwei Objekte eingeteilt sind.

2.2 Zählformen

Bei endlichen Mengen gibt $|A|$ die Anzahl der Elemente (*Kardinalität*) an.

2.2.1 Summenformel und Produktformel

Bei endlichen Mengen A, B gilt die *Summenformel*:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Ausserdem gilt die *Produktformel*, auch für eine endliche Menge von Mengen:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

2.2.2 Binomialkoeffizient

Der *Binomialkoeffizient* dient dazu, die möglichen Kombinationen von k Objekten aus insgesamt n verschiedenen Elementen zu ermitteln. Dabei ist die Reihenfolge unerheblich und es wird nicht zurückgelegt. Die Definition ist wie folgt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

2.2.3 Binomialsatz

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Es gilt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

2.2.4 Siebformel

Mithilfe der *Siebformel* kann die Kardinalität einer Menge durch die Kardinalitäten ihrer Teilmengen bestimmt werden.

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_s| = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 \pm \ldots + (-1)^{s-1} \cdot \alpha_s$$

Dabei werden die α berechnet, indem man den Durchschnitt von je i Mengen bildet und deren Mächtigkeit summiert.

2.2.5 Permutationen

Eine *Permutation* von $n \in \mathbb{N}$ Elementen $\pi : \{1, \ldots, n\} \mapsto \{1, \ldots, n\}$ ist eine Bijektion. Ein Element k daraus heißt *Fixpunkt*, wenn $\pi(k) = k$ ist.

Anzahl der Permutationen Von n Elementen gibt es genau $n!$ Permutationen, und $(n-1)!$ Permutationen mit dem Fixpunkt k. Die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen ist

$$n! \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2} - \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{n!}$$

2.2.6 Kombination mit Wiederholung

Wenn die Reihenfolge egal ist und Wiederholungen erlaubt sind, wird eine angepasste Version des Binomialkoeffizienten genutzt:

$$\binom{n+k-1}{k}$$

2.2.7 Wann nehme ich was?

Reihenfolge egal, ohne Zurücklegen	Binomialkoeffizient
Reihenfolge egal, mit Zurücklegen	Kombination mit Wiederholung

3 Rekursion

3.1 Lineare Rekursion

Angenommen $T : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ erfüllt die *lineare Rekursion*

$$\begin{aligned}&T(n) = r \cdot T(n-1) + a,\ a, r \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\\&T(1) = b.\end{aligned}$$

Dann ist die Lösung:

$$\begin{aligned}&T(n) = r^n T(0) + a \sum_{i=0}^{a-1} r^2,\ n \in \mathbb{N}_0, r = 1\\&T(n) = r^a T(0) + a \frac{1-r^n}{1-r},\ \text{für } r \neq 1\end{aligned}$$

3.2 Wachstum von Funktionen

Seien $f, g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$.
Abschätzung nach oben
Eine Funktion kann nach oben asymptotisch abgeschätzt werden, wenn $\exists c > 0$, s.d. $|f(n)| \leq c \cdot |g(n)|,$ für $n \geq n_0$. Man schreibt dann $f(n) = O(g(n))$, $O(g(n))$ enthält also alle Funktionen, durch die $f(n)$ nach oben asymptotisch abgeschätzt wird.

Abschätzung nach unten
Wenn $\exists c > 0$, so dass $|f(n)| \geq c \cdot |g(n)|$, schreibt man $f(n) = \Omega(g(n))$. So wächst $f(n)$ also schneller als $g(n)$.

Abschätzung nach oben und unten Die Kombination von O und Ω heißt Θ. Also ist $f(n) = \Theta$, wenn $\exists c_1, c_2$, so dass $c_1 \cdot |g(n)| \leq |f(n)| \leq |c_2 \cdot g(n)|$.

4 Graphentheorie

4.1 Kreis

Ein geschlossener Kantenzug mit $k_1, k_2, \ldots, k_s$, der die Ecken $e_1, e_2, \ldots, e_s = e_0$ miteinander verbindet. Alle Kanten müssen dabei unterschiedlich sein. Die Länge des Kreises beschreibt die Anzahl der Kanten oder Ecken.

4.2 Eulerscher Kreis

Ein Kreis C in einem Graph G heißt eulersch, wenn jede Kante aus G in ihm genau einmal vorkommt.

4.3 Eulerscher Graph

Ein Graph heißt eulersch, wenn er einen eulerschen Kreis besitzt. Jede Ecke eines eulerschen Graphen hat geraden Grad. Besitzt also eine Ecke des Graphen ungeraden Grad, so ist es kein eulerscher Graph.

4.4 Zusammenhangskomponente

Ein maximaler, zusammenhängender Teilgraph G^* eines Graphen G.

4.5 Wurzelbaum und Suchtheorie

4.5.1 Wurzelbaum

Ein *Wurzelbaum* ist ein Paar (T, v), wobei T ein Baum ist und v eine ausgezeichnete Ecke, als so genannte *Wurzel*.
Die *Länge einer Ecke* $l(e), e \in E$ bezeichnet den eindeutigen Weg von v nach e. Die Länge des gesamten Baumes ist die maximale Länge einer Ecke.

4.5.2 (n, q)-Baum

Besitzt ein Baum n Blätter und hat die Wurzel genau q direkte Nachfolger, spricht man von einem *(n,q)-Baum*. Besitzt die Wurzel und jede innere Ecke genau q direkte Nachfolger, ist dies ein *vollständiger (n, q)-Baum*

Satz 4.1. *Sei T ein (n, q)-Baum, wobei $n \geq 1, q \geq 2$. Dann ist $l(T) = \log_q n$*

4.5.3 Informationstheoretische Schranke

Die Menge (n, q) beschreibt alle (n, q)-Bäume. Die Zahl $\log_q n = \min\{l(T) | T \in (n, q)\}$ heisst die *informationstheoretische Schranke* bzgl. (n, q).

Index