Zusammenfassung Diskrete Mathematik

Marcel Schneider
matheschneider@webschneider.org

31. Januar 2018

Vorwort

Dieses Dokument dient zur kurzen Zusammenfassung der wichtigsten Sätze und Definitionen. Ich füge hier nur nach Lust und Laune Dinge ein, so dass dies in keinster Weise als vollständig oder stets korrekt angesehen werden darf. Die Quelldateien sind öffentlich unter `https://git.webschneider.org/uni/sammlung` einsehbar. Jeder ist dazu aufgerufen, sich an der Entwicklung zu beteiligen!

Inhaltsverzeichnis

1 Abbildungen

Man beachte auch das Mafia-Skript.

1.1 Kompositionen

Kompositionen von Funktionen sind *assoziativ*.

Sei $f : X \to Y$ eine Funktion:

i. f ist injektiv $\leftrightarrow \exists g : Y \to X$, sodass $g \circ f = id_x$

ii. f ist surjektiv $\leftrightarrow \exists g : Y \to X$, sodass $f \circ g = id_y$

iii. f ist bijektiv $\leftrightarrow \exists g : Y \to X$, sodass $g \circ f = id_x, f \circ g = id_y$

1.2 Umkehrfunktion

Seien X, Y Mengen und die Abbildungen $f : X \to Y$ eine Bijektion. Dann gibt es eine eindeutige Funktion $g : Y \to X$ mit $g(y) = x$, wobei $f^{-1}(y) = \{x\}$. Diese wird *Umkehrfunktion* oder *Inverse* von f bezeichnet.

2 Zählen und Kombinatorik

2.1 Schubfachprinzip

Das Schubfachprinzip besagt, wenn m Objekte in n Kategorien (*Schubfächer*) eingeteilt werden, gibt es mindestens eine Kategorie, in der mindestens zwei Objekte eingeteilt sind.

2.2 Zählformen

Bei endlichen Mengen gibt $|A|$ die Anzahl der Elemente (*Kardinalität*) an.

2.2.1 Summenformel und Produktformel

Bei endlichen Mengen A, B gilt die *Summenformel*:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Ausserdem gilt die *Produktformel*, auch für eine endliche Menge von Mengen:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

2.2.2 Binomialkoeffizient

Der *Binomialkoeffizient* dient dazu, die möglichen Kombinationen von k Objekten aus insgesamt n verschiedenen Elementen zu ermitteln. Dabei ist die Reihenfolge unerheblich und es wird nicht zurückgelegt. Die Definition ist wie folgt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Satz 2.2.1. *Seien $k, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

2.2.3 Binomialsatz

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Es gilt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Satz 2.2.2. *1.*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \ \forall k, n \in \mathbb{N}_0$$

2.

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \ldots = 0$$

2.2.4 Siebformel

Mithilfe der *Siebformel* kann die Kardinalität einer Menge durch die Kardinalitäten ihrer Teilmengen bestimmt werden.

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_s| = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 \pm \ldots + (-1)^{s-1} \cdot \alpha_s$$

Dabei werden die α berechnet, indem man den Durchschnitt von je i Mengen bildet und deren Mächtigkeit summiert.

2.2.5 Permutationen

Eine *Permutation* von $n \in \mathbb{N}$ Elementen $\pi : \{1, \ldots, n\} \mapsto \{1, \ldots, n\}$ ist eine Bijektion. Ein Element k daraus heißt *Fixpunkt*, wenn $\pi(k) = k$ ist.

Anzahl der Permutationen Von n Elementen gibt es genau $n!$ Permutationen, und $(n-1)!$ Permutationen mit dem Fixpunkt k. Die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen ist

$$n!\frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2} - \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{n!}$$

Satz 2.2.3. *Die Anzahl der nicht-surjektiven Abbildungen* $f : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, n\}$ *ist gleich*

$$\sum_{m=1}^{k} (-1)^{m-1} \binom{n}{m} (n-m).$$

Die Anzahl der Surjektionen beträgt

$$\sum_{m=0}^{n} (= 1)^m \binom{n}{m} (n-m)^k$$

2.2.6 Kombination mit Wiederholung

Wenn die Reihenfolge egal ist und Wiederholungen erlaubt sind, wird eine angepasste Version des Binomialkoeffizienten genutzt:

$$\binom{n+k-1}{k}$$

2.2.7 Wann nehme ich was?

Reihenfolge egal, ohne Zurücklegen	Binomialkoeffizient
Reihenfolge egal, mit Zurücklegen	Kombination mit Wiederholung

3 Rekursion

3.1 Lineare Rekursion

Angenommen $T : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ erfüllt die *lineare Rekursion*

$$\begin{aligned} &T(n) = r \cdot T(n-1) + a,\ a, r \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \\ &T(1) = b. \end{aligned}$$

Dann ist die Lösung:

$$\begin{aligned} &T(n) = r^n T(1) + a \sum_{i=0}^{a-1} r^2,\ n \in \mathbb{N}_0, r = 1 \\ &T(n) = r^a T(1) + a \frac{1-r^n}{1-r},\ \text{für } r \neq 1 \end{aligned}$$

3.1.1 Geometrische Summenformel

Es gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

3.2 Wachstum von Funktionen

Seien $f, g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$.
Abschätzung nach oben
Eine Funktion kann nach oben asymptotisch abgeschätzt werden, wenn $\exists c > 0$, s.d. $|f(n)| \leq c \cdot |g(n)|$, für $n \geq n_0$. Man schreibt dann $f(n) = O(g(n))$, $O(g(n))$ enthält also alle Funktionen, durch die $f(n)$ nach oben asymptotisch abgeschätzt wird.

Abschätzung nach unten
Wenn $\exists c > 0$, so dass $|f(n)| \geq c \cdot |g(n)|$, schreibt man $f(n) = \Omega(g(n))$. So wächst $f(n)$ also schneller als $g(n)$.

Abschätzung nach oben und unten Die Kombination von O und Ω heißt Θ. Also ist $f(n) = \Theta$, wenn $\exists c_1, c_2$, so dass $c_1 \cdot |g(n)| \leq |f(n)| \leq |c_2 \cdot g(n)|$.

3.3 Master-Theorem

Das *Master-Theorem* lässt sich auf Rekursionen der folgenden Struktur anwenden:

$$\begin{aligned} T(n) &= a \cdot T\left(\lceil {}^{n}/_{b} \rceil\right) + c(n) && , n > n_0 \\ T(n) &= \Theta(1) && , n \leq n_0 \end{aligned}$$

c muss dabei monoton wachsend sein. Nun gilt:

1. Ist $c(n) = \mathcal{O}\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$ für ein ε mit $0 < \varepsilon < \log_b a$, so ist

$$T(n) = \mathcal{O}\left(n^{\log_b a}\right)$$

2. Ist $c(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, so ist

$$T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \cdot \log_b n\right)$$

3. Erfüllt c die Bedingung $\exists \gamma \in (0,1)$, so dass $ac(\lceil \frac{a}{b} \rceil) \leq \gamma c(n)$ für ein hinreichend großes n und ist $c(n) = \Omega\left(n^{\log_b a + \varepsilon}\right)$, so ist

$$T(n) = \Theta\left(c\left(n\right)\right)$$

Zahlreiche Übungen lassen sich im Internet finden[1].

[1] http://www.csd.uwo.ca/~moreno/CS433-CS9624/Resources/master.pdf

4 Graphentheorie

4.1 Ungerichtete Graphen

4.1.1 Kreis

Ein geschlossener Kantenzug mit $k_1, k_2, \ldots, k_s$, der die Ecken $e_1, e_2, \ldots, e_s = e_0$ miteinander verbindet. Alle Kanten müssen dabei unterschiedlich sein. Die Länge des Kreises beschreibt die Anzahl der Kanten oder Ecken.

4.1.2 Eulerscher Kreis

Ein Kreis C in einem Graph G heißt eulersch, wenn jede Kante aus G in ihm genau einmal vorkommt.

4.1.3 Eulerscher Graph

Ein Graph heißt eulersch, wenn er einen eulerschen Kreis besitzt. Jede Ecke eines eulerschen Graphen hat geraden Grad. Besitzt also eine Ecke des Graphen ungeraden Grad, so ist es kein eulerscher Graph.

4.1.4 Zusammenhangskomponente

Ein maximaler, zusammenhängender Teilgraph G^* eines Graphen G.

4.1.5 Offene Eulersche Linie

Ein Weg in einem Graph G heißt *offene Eulersche Linie*, wenn jede Kante genau einmal enthalten ist und *keinen* Kreis enthält.

Satz 4.1.1. *Sei G ein Graph.*

1. *Besitzt G eine offene eulersche Linie, so hat G genau zwei Ecken ungeraden Grades.*
2. *Ist G zusammenhängend und hat genau zwei Ecken ungeraden Grades, so hat G eine offene eulersche Linie.*

Satz 4.1.2. *Ein Graph G ist genau dann bipartit, wenn alle Kreise in G eine gerade Länge haben.*

4.2 Bäume

4.2.1 Definition

Ein *Baum* ist ein zusammenhängender Graph G, der keine Kreise positiver Länge enthält. Als *Blatt* wird eine Endecke mit Grad 1 bezeichnet.

Satz 4.2.1. *Jeder Baum mit mindestens 2 Ecken hat eine Endecke.*

Satz 4.2.2. *Ist G ein Baum mit n Ecken und m Kanten, so ist $m = n - 1$*

Satz 4.2.3. *Sei G ein zusammenhängender Graph mit n Ecken und M Kanten. Dann ist $m \geq n - 1$ mit Gleicheit genau dann, wenn G ein Baum ist.*

4.2.2 Binärer Baum

Ein *binärer Baum* ist ein Baum G mit den Eigenschaften

i. Es gibt eine eindeutige Ecke *Wurzel*, mit dem Grad 2

ii. alle andere Ecken haben entweder den Grad 3 oder 1 (Blätter).

Die Höhe des Baumes ist die maximale Länge eines Weges, der die Wurzel als eine Endecke hat.

Satz 4.2.4.
1. *Ein binärer Baum der Höhe h hat höchstens 2^h Blätter.*
2. *Ein binärer Baum G mit b Blättern hat die Höhe $h \geq \lceil \log_2 b \rceil$*

4.3 Wurzelbaum und Suchtheorie

4.3.1 Wurzelbaum

Ein *Wurzelbaum* ist ein Paar (T, v), wobei T ein Baum ist und v eine ausgezeichnete Ecke, als so genannte *Wurzel*.
Die *Länge einer Ecke* $l(e), e \in E$ bezeichnet den eindeutigen Weg von v nach e. Die Länge des gesamten Baumes ist die maximale Länge einer Ecke.

4.3.2 (n, q)-Baum

Besitzt ein Baum n Blätter und hat die Wurzel höchstens q direkte Nachfolger, spricht man von einem *(n,q)-Baum*. Besitzt die Wurzel und jede innere Ecke genau q direkte Nachfolger, ist dies ein *vollständiger (n, q)-Baum*

Satz 4.3.1. *Sei T ein (n, q)-Baum, wobei $n \geq 1, q \geq 2$. Dann ist $l(T) = \lceil \log_q n \rceil$*

4.3.3 Informationstheoretische Schranke

Die Menge $\mathcal{T}(n, q)$ beschreibt alle (n, q)-Bäume. Die Zahl $\log_q n = \min\{l(T) | T \in \mathcal{T}(n, q)\}$ heisst die *informationstheoretische Schranke* bzgl. (n, q).

4.3.4 Die Kraftsche Ungleichung

1. Sei T ein (n, q)-Baum mit Blättern $1, \dots, n$ der Längen $l_1, l_2, \dots, l_n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $\sum_{i=1}^{n} q^{-l_i} \leq 1$ und die Gleicheit gilt genau dann, wenn T vollständig ist.
2. Sind $l_1, \dots, l_n \in \mathbb{N}_0$, so dass $\sum_{j=1}^{n} q^{-l_i} \leq 1$, so existiert ein (n,q)-Baum mit Blättern $b_1, \dots, b_n$, so dass $l(b_i) = l_i, i = 1, \dots, n$

4.3.5 Erwartete Länge

Sei T ein (n,q)-Baum mit den Blättern $1, \dots, n$ und sei $l_i = l(i)$ die Länge des i-ten Blattes. Sei weiter $(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf den Blättern, d.h. $p_i \in [0, 1]$ für $i = 1, \dots, n$ und $\sum_{i=0}^{n} p_i = 1$. Die *erwartete Länge* $\overline{L}(T)$ von T ist definiert als

$$\overline{L}(T) = \sum_{i=1}^{n} p_i l_i.$$

Weiter sei

$$\overline{L}(p_1, \dots, p_n) := \min \left\{ \overline{L}(t) | T \in \mathcal{T}(n, q) \right\}$$

Ein Baum heißt *optimal*, falls $\overline{L}(T) = \overline{L}(p_1, \dots, p_n)$

Index