

Zusammenfassung MafIA 1

Marcel Schneider

Maik Wegener

matheschneider@webschneider.org

17. Januar 2018

Vorwort

Dieses Dokument dient zur kurzen Zusammenfassung der wichtigsten Sätze und Definitionen. Ich füge hier nur nach Lust und Laune Dinge ein, so dass dies in keins-ter Weise als vollständig oder stets korrekt angesehen werden darf. Sollten Fehler ge-funden werden, bitte per Mail darüber informieren, dann können diese hier berichtigt werden. Auch Issues im Git sind gerne gesehen. Die Quelldateien sind öffentlich unter <https://git.webschneider.org/uni/sammlung> einsehbar. Jeder ist dazu aufgerufen, sich an der Entwicklung zu beteiligen!

Inhaltsverzeichnis

1 Mengenlehre	3
1.1 Menge	3
1.2 Teilmenge	3
1.3 Leere Menge	3
1.4 Potzenmenge	3
1.5 Schnittmenge	3
1.6 Vereinigung	3
1.7 Differenzmenge	4
1.8 Satz: Regeln für Mengen	4
2 Relationen	4
2.1 Eigenschaften	5
2.2 Äquivalenzrelation	5
2.3 Ordnungsrelation	5
2.3.1 Halbe Ordnung	5
2.3.2 Ganze Ordnung	5
3 Abbildungen	5
3.1 Definition	5
3.1.1 Verknüpfte Abbildungen	6

3.2	Eigenschaften	6
3.2.1	Beweise	6
3.2.2	Regeln für Abbildungen	7
4	Sprache und Logik	7
4.1	Grundlagen	7
4.1.1	Zeichen, Alphabete, Worte, Sprachen	7
4.1.2	Wahrheitswerte	8
4.1.3	Grundoperationen der Aussagenlogik	8
4.1.4	Beweistechnik	9
4.2	Boolesche Funktionen	9
4.2.1	Prädikatenlogik	9
4.3	Negation von Quantoren	10
4.4	Mengen und Logik - Bitvektoren	10
4.5	Mächtigkeit	10
5	Zahlen	10
5.1	Natürliche Zahlen	10
5.1.1	Peano-Axiome	10
5.2	Gruppen	11
6	Vektorräume	11
6.1	Vektorraum	11
6.1.1	Basis	12
6.2	Untervektorraum	12
6.3	Kombinationen	12
6.3.1	Linearkombination	12
6.3.2	Affinkombination	12
6.3.3	Konvexkombination	13

1 Mengenlehre

1.1 Menge

Eine Zusammenfassung von unterschiedlichen Elementen zu einem Ganzen

Beispiel: $M := \{\text{the, die, der, das}\}$ oder

$M := \{x \mid x \text{ ein bestimmter Artikel aus Englisch oder Deutsch}\}$

1.2 Teilmenge

$$N \subset M \Leftrightarrow M \supset N \quad (1)$$

Beispiel: $N := \{\text{the}\}$ ist eine Teilmenge von M , jedoch ist M keine Teilmenge von N , da nicht alle Elemente aus M in N sind.

1.3 Leere Menge

$$O := \{\} = \emptyset \quad (2)$$

Beispiel: $O := \{x \mid x \text{ ein Artikel aus dem chinesischen}\} = \emptyset$

Anmerkung: In der chinesischen Sprache gibt es keine Artikel

1.4 Potzenmenge

Sei M eine Menge.

$P(M)$ (auch 2^M):= Menge von allen Teilmengen von M . Sei l die Anzahl der Elemente von M , so ist die Anzahl der Möglichkeiten ist 2^l

Beispiel: $Q := \{1, 2, 3\} \Rightarrow P(Q) := \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

1.5 Schnittmenge

$$M \cap N := \{x : x \in M \wedge x \in N\} \quad (3)$$

Die Schnittmenge besteht also aus den gemeinsamen Elementen der beiden Mengen. Falls $M \cap N = \emptyset$ sind, sind M und N *disjunkt*

Beispiel: $M := \{\text{the, die, der, das}\}$ und $N := \{\text{der, die}\} \Rightarrow M \cap N := \{\text{der, die}\}$

1.6 Vereinigung

$$M \cup N = \{x : x \in M \vee x \in N\} \quad (4)$$

Die Vereinigung besteht aus allen Elementen, die in M oder in N sind.

Beispiel: $M := \{\text{the}\}$ und $N := \{\text{der, die}\} \Rightarrow M \cup N := \{\text{the, der, die}\}$

1.7 Differenzmenge

$$M \setminus N = \{x : x \in M \wedge x \notin N\} \quad (5)$$

Die Differenzmenge besteht aus den Elementen aus M , die **nicht** in N sind.

Beispiel: $M := \{\text{the, die, der, das}\}$ und $N := \{\text{der, die}\} \Rightarrow M \setminus N := \{\text{the, das}\}$

1.8 Satz: Regeln für Mengen

Seien M, N und Q Mengen, dann gelten folgende Regeln:

1. $M \cap N = N \cap M$ (\cap ist kommutativ)
2. $M \cup N = N \cup M$ (\cup ist kommutativ)
3. $(M \cap N) \cap Q = M \cap (N \cap Q)$ (\cap ist assoziativ)
4. $(M \cup N) \cup Q = M \cup (N \cup Q)$ (\cup ist assoziativ)
5. $(M \cap N) \cup Q = (M \cup Q) \cap (N \cup Q)$ (distributiv)
6. $(M \cup N) \cap Q = (M \cap Q) \cup (N \cap Q)$ (distributiv)
7. $M \cap M = M$ (Eine Menge ist geschnitten mit sich selbst wieder die Menge)
8. $M \cup M = M$ (Eine Menge ist vereinigt mit sich selbst wieder die Menge)
9. $M \cap \emptyset = \emptyset$ (Eine Menge, geschnitten mit der leeren Menge, ist die leere Menge)
10. $M \cup \emptyset = M$ (Eine Menge, vereinigt mit der leeren Menge, ist die Menge selbst)

Zusammenfassend (1-6): Schnittmenge und Vereinigung sind kommutativ, assoziativ und distributiv

2 Relationen

Eine Relation ist zunächst eine Teilmenge beliebiger Mengen M, N . Man schreibt für ein beliebiges Paar aus $(x, y) \in M \times N$ entweder xRy oder seltener $(x, y) \in R$.

2.1 Eigenschaften

Zur Beschreibung einer Relation gibt es folgende Eigenschaften, dazu betrachten wir eine zweistellige Relation R auf M :

- reflexiv** $\forall x \in M : xRx$, das Element steht also zu sich selbst in Relation.
- symmetrisch** $\forall x, y \in M$ aus xRy auch yRx folgt. Die Reihenfolge ist also egal.
- transitiv** $\forall x, y, z \in M$ und xRy und yRz folgt xRz .
- antisymmetrisch** $\forall x, y \in M : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$
- total** $\forall x, y \in M : xRy \vee yRx$, also immer zwei Elemente in Relation stehen

Beispiel: antisymmetrisch: $3 \leq 3 \wedge 3 \geq 3 \Rightarrow 3 = 3$

2.2 Äquivalenzrelation

Eine Relation heißt Äquivalenzrelation, wenn die ersten drei Eigenschaften aus 2.1 (reflexiv, symmetrisch, transitiv) zutreffen.

2.3 Ordnungsrelation

Eine Relation heißt Ordnungsrelation (\prec), wenn sie total, reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

Beispiel: Sei $M = \mathbb{R}$, $\prec \rightarrow \leq : x \leq y$

2.3.1 Halbe Ordnung

\prec heißt eine Halbordnung auf M , wenn Reflexivität, Transitivität und Antisymmetrie gegeben sind für $x \prec y$ für $x, y \in M$

2.3.2 Ganze Ordnung

\prec heißt eine ganze Ordnung, wenn alle $x, y \in M$ entweder $x \prec y$ oder $y \prec x$ erfüllen.

3 Abbildungen

3.1 Definition

Eine Abbildung f einer Menge $U \subset M$ auf eine Menge N ist eine Vorschrift, die jedem $x \in U$ (Urbild) genau ein Element $y \in N$ (Bild von x) zuordnet. Dabei ist U die *Urbildmenge* und N die *Bildmenge*. Weiter ist U die *Domain (Definitionsbereich)* von f in M ($U = \text{dom}(f)$)

Eine Abbildung f von einer Menge M in eine Menge $Y \subset N$ ist gegeben durch eine Relation:

R_f zwischen M und N , bei der jedes $x \in M$ mit genau einem $y \in N$ in Relation steht: $(x, y) \in R_f$ und $(x, \tilde{y}) \in R_f \Rightarrow y = \tilde{y}$. Wir schreiben in diesem Fall $f(x) = y$

3.1.1 Verknüpfte Abbildungen

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \text{ wobei } g : M \rightarrow N \text{ und } f : N \rightarrow P \Rightarrow f \circ g : M \rightarrow P \quad (6)$$

3.2 Eigenschaften

Wir betrachten eine Abbildung $f : M \rightarrow N$.

injektiv $\forall x, y \in M, x \neq y : f(x) \neq f(y)$

surjektiv $\forall y \in N \exists x \in M : y = f(x)$

bijektiv wenn f injektiv und surjektiv ist

Dabei bedeutet *injektiv*, dass unterschiedliche Eingaben unterschiedliche Ausgaben zur Folge haben, es wird also kein y -Wert zweimal getroffen. Das heißt auch, dass ein y -Wert nicht getroffen werden kann.

Surjektiv hingegen bedeutet, dass es zu jedem Bild ein mindestens Urbild gibt. Ein y kann also durch mehrere x getroffen werden, es gibt jedoch kein y , zu dem es keinen x -Wert gibt.

3.2.1 Beweise

Nachfolgend betrachten wir $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto mx + b, m \neq 0$.

Um die *Injektivität* einer Funktion zu beweisen, nehmen wir die umgekehrte Definition, also $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Beweis. Zu zeigen: $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Sei $f(x) = f(y)$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y) \\ mx + b &= my + b \\ mx &= my \\ x &= y \end{aligned}$$

Da $x = y$, ist f injektiv. □

Um *Surjektivität* zu zeigen, wird zunächst die Definition von x ermittelt:

$$\begin{aligned} f(x) &= y \\ mx + b &= y \\ mx &= y - b \\ x &= \frac{y - b}{m} \end{aligned}$$

Diese Definition macht man sich nun im Beweis zu nutze, um $f(x) = y$ für beliebige y zu zeigen:

Beweis. Sei $y \in \mathbb{R}$ beliebig. Aus vorheriger Berechnung ist bekannt: $x = \frac{y-b}{m}$

$$f(x) = f\left(\frac{y-b}{m}\right) = m \cdot \frac{y-b}{m} + b = y - b + b = y$$

Daraus resultiert, dass f surjektiv ist. □

Da f surjektiv und injektiv ist, folgt auch die *Surjektivität* für f .

3.2.2 Regeln für Abbildungen

Satz:

- a.) Sind f und g injektiv, so ist $f \circ g$ injektiv
- b.) Sind f und g surjektiv, so ist $f \circ g$ surjektiv
- c.) Sind f und g bijektiv, so ist $f \circ g$ bijektiv
- d.) Ist $f \circ g$ injektiv, so ist auch g injektiv
- e.) Ist $f \circ g$ surjektiv, so ist auch f surjektiv
- f.) Ist $f \circ g$ bijektiv, so ist f injektiv und g surjektiv

Die Beweise zu a.) - f.) werden zur **Übung** gelassen. Teilweise wurden sie schon in der Vorlesung gezeigt.

Anmerkung: : In der Vorlesung wurde noch kurz Russels Paradoxon¹ angesprochen:

$$R := \{x \in \Omega \mid x \notin \{x\}\} \subset \Omega$$
$$R \in R \Leftrightarrow R \notin \{R\}$$

4 Sprache und Logik

4.1 Grundlagen

4.1.1 Zeichen, Alphabete, Worte, Sprachen

Definition:

1. Ein Zeichen ist ein Symbol (*Beispiel:* x oder \in)
2. Eine Zeichenkette ist eine Aneinanderreihung von Zeichen (*Beispiel:* $x \in M$ oder "diesisteineZeichenkette")

¹<https://de.wikipedia.org/wiki/Barbier-Paradoxon> bzw. https://de.wikipedia.org/wiki/Russellsche_Antinomie

3. Ein Alphabet ist eine endliche Menge von Zeichen
4. Ein Wort oder Satz der Länge n über einem Alphabet A ist eine Verkettung von n Zeichen aus A . Das leere Wort wird mit ϵ bezeichnet.
 A^n ist die Menge aller Wörter der Länge n
5. Die freie Sprache S über einem Alphabet A ist eine Teilmenge von A^*

4.1.2 Wahrheitswerte

Definition: Die Menge B der Wahrheitstabelle ist wie folgt definiert:

$$B := \{\text{wahr, falsch}\} = \{\text{true, false}\} = \{W, F\} = \{1, 0\} \quad (7)$$

Definition: Sei S eine Sprache über einem Alphabet A . Sei T eine Teilmenge von S und es gebe eine Abbildung $I : T \rightarrow B$. Dann heißen die Elemente von T logische *Aussagen* und die Abbildung I heißt *Interpretation*³

Beispiel: 2 ist kleiner als 7

Definition: Ein n -stelliges Prädikat auf M ist eine Abbildung von $M^n \rightarrow B$.

$$\Rightarrow \text{Relation } r : M^n \rightarrow B, r(x) := \begin{cases} \text{wahr, wenn } x \in R \\ \text{falsch, wenn } x \notin R \end{cases}$$

4.1.3 Grundoperationen der Aussagenlogik

1. Negation $\neg A$: es ist nicht wahr, dass A wahr ist
2. Konjunktion $A \wedge B$: A und B
3. Disjunktion $A \vee B$: A oder B
4. Implikation $A \Rightarrow B$: Aus A folgt B
5. Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$: A genau dann wenn B

Anmerkung: Etwas übersichtlicher sind die Operationen in Tabellenform:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w
f	w	w	f	w	w	f
w	f	f	f	w	f	f
f	f	w	f	f	w	w

Abbildung 1: Grundoperationen der Aussagenlogik

Satz:

²nicht zu verwechseln mit einem Produktraum von Alphabeten ($A \times A \times A \times \dots$)

³Anschaulicher: Aussagen sind Sätze, die unter einer gegebenen Interpretation einen Wahrheitswert haben

1. $p \wedge q = q \wedge p$ (Kommutativität)
2. $p \vee q = q \vee p$ (Kommutativität)
3. $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$ (Assoziativität)
4. $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$ (Assoziativität)
5. $(p \wedge q) \vee r = (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ (Distributivität von \wedge und \vee)
6. $(p \vee q) \wedge r = (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ (Distributivität von \vee und \wedge)
7. $p \wedge p = p$ (Idempotenz)
8. $p \vee p = p$ (Idempotenz)
9. $\neg(p \wedge q) = (\neg p) \vee (\neg q)$ (Morgensche Regel)
10. $\neg(p \vee q) = (\neg p) \wedge (\neg q)$ (Morgensche Regel)
11. $\neg(\neg(q)) = q$

4.1.4 Beweistechnik

Es gibt verschiedene Wege eine Behauptung zu beweisen. Drei wurden in der Vorlesung behandelt:

1. Direkter Beweis $p \rightarrow q$: Sei p , dann zeigen wir, dass q wahr ist
2. indirekter oder Widerspruchsbeweis (Kontrapositiv)
3. Beweis durch vollständige Induktion

4.2 Boolesche Funktionen

Sei $B := \{0, 1\}$. Dann existiert eine Abbildung $f : B^n \rightarrow B$.

Beispiel: $f(A) = \neg(A)$

4.2.1 Prädikatenlogik

Sei P ein Prädikat auf M

- P ist erfüllbar, wenn $P(x)$ wahr ist für mindestens ein $x \in M$
 $\exists x \in M$ sodass $P(x)$ wahr ist
- P ist allgemeingültig, wenn $P(x)$ wahr ist, wenn $x \in M$
 $(\forall x \in M)P(x)$ ist wahr

4.3 Negation von Quantoren

- $\neg(P(x)\forall x \in M) \Leftrightarrow \exists x \in M$ sodass $\neg P(x)$
- $\neg(\exists x \in M$ sodass $P(x)) \Leftrightarrow \forall x \in M, \neg P(x)$

4.4 Mengen und Logik - Bitvektoren

Sei $M := x_1, \dots, x_n, N \subseteq M$. Bitvektoren $B_N := (b_1, \dots, b_n), b_j = \begin{cases} 1, & \text{falls } x_j \in N \\ 0, & \text{falls } x_j \notin N \end{cases}$

Seien K und $L \subseteq M, L \cap K, L \cup K$, dann sind:

- $B_{L \cap K} = B_L \wedge B_K$
- $B_{L \cup K} = B_L \vee B_K$
- $B_{L^c} = 1 - B_L$ (Bitinversion)
- $\bar{L} = M \setminus L$
- $L^c = M \setminus L$

Anmerkung: Die Anzahl aller möglichen Teilmengen von $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ (bei endlicher Potenzmenge) ist äquivalent zur Anzahl der Bitvektoren mit m Komponenten

4.5 Mächtigkeit

Definition: Zwei Mengen M und Ω heißen gleichmächtig, wenn es eine bijektive Abbildung $f : M \rightarrow \Omega$ gibt

Satz:

- a) Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Mengen
- b) Endliche Mengen mit gleicher Anzahl an Elementen sind gleichmächtig

Beispiel: Sei $M := \{x_1, \dots, x_n\}$
 $|P(M)| = |P(B_M)| = 2^M$

5 Zahlen

5.1 Natürliche Zahlen

5.1.1 Peano-Axiome

Definition der natürlichen Zahlen durch Peano:

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. es gibt eine Nachfolgerabbildung $succ : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$

3. succ ist injektiv
4. Ist $M \subseteq \mathbb{N}$ mit
 - i. $0 \in M$
 - ii. $m \in M \Rightarrow \text{succ}(m) \in M \forall m \in M$
 so gilt $M = \mathbb{N}$.

5.2 Gruppen

Eine nichtleere Menge G mit einer Verknüpfung \circ heißt Gruppe, wenn die folgenden Eigenschaften zutreffen:

1. Assoziativität von \circ , also $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \forall a, b, c \in G$
2. Es existiert ein neutrales Element e , für das gilt: $e \in G : a \circ e = a \forall a \in G$
3. Zu jedem Element gibt es ein Inverses a^{-1} , für das gilt: $a \circ a^{-1} = e$

Gilt darüber hinaus die *Kommutativität*

$$a \circ b = b \circ a \forall a, b \in G$$

heißt die Gruppe abelsch oder kommutativ.

6 Vektorräume

6.1 Vektorraum

Eine nichtleere Menge V heißt Vektorraum über einem Körper \mathbb{K} , wenn die folgenden Eigenschaften zutreffen:

Addition

$$(u + v) + w = u + (v + w) \forall u, v, w \in V \quad (8)$$

$$u + v = v + u \quad \forall u, v \in V \quad (9)$$

$$u + 0 = u \quad \forall u, v \in V \quad (10)$$

$$v + (-v) = 0 \quad \forall v \in V \quad (11)$$

Skalarmultiplikation:

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v) \quad (12)$$

$$\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v \quad (13)$$

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v) \quad (14)$$

$$1 \cdot v = v \quad (15)$$

6.1.1 Basis

Minimale Menge der Einheitsvektoren⁴, mit denen alle anderen Vektoren erzeugt werden können. Die Vektoren untereinander sind linear unabhängig. Beispiel für \mathbb{R}^2 :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

6.2 Untervektorraum

Sei V ein Vektorraum über dem Körper \mathbb{K} . Dann ist $U \subset V$ ein Untervektorraum, wenn gilt:

1. U ist nicht leer, also muss mindestens $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$ gelten.
2. Die Addition muss abgeschlossen sein.
3. Die Skalarmultiplikation muss abgeschlossen sein.

6.3 Kombinationen

Voraussetzungen für die nächsten Definitionen: Seien v_1, \dots, v_m Elemente eines Vektorraums V über einem Skalarenkörper \mathbb{K} , und es sei $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ ein m -Tupel aus \mathbb{K}^m für ein $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

6.3.1 Linearkombination

Eine Linearkombination ist eine Vektoraddition, bei der jeder Vektor einer Menge V zunächst mit einem Skalar α multipliziert wird.

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot v_j$$

6.3.2 Affinkombination

Wenn außerdem gilt, dass die Summe aller Koeffizienten 1 ergibt, also

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j = 1$$

dann spricht man von einer *Affinkombination*.

⁴Ein Vektor der Länge Eins, <https://de.wikipedia.org/wiki/Einheitsvektor>

6.3.3 Konvexkombination

Wenn darüber hinaus $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist und

$$\alpha_j \in [0, 1] \forall j, 1 \leq j \leq m$$

gilt, spricht man von einer *Konvexkombination*. Vergleiche zum Verständnis für Konvex die Definition auf Wikipedia⁵

Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons “Namensnennung – Nicht-kommerziell – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Deutschland” Lizenz.



⁵https://de.wikipedia.org/wiki/Konvexe_Menge