Zusammenfassung MafIA 1

Marcel Schneider
matheschneider@webschneider.org

4. Januar 2018

Vorwort

Dieses Dokument dient zur kurzen Zusammenfassung der wichtigsten Sätze und Definitionen. Ich füge hier nur nach Lust und Laune Dinge ein, so dass dies in keinster Weise als vollständig oder stets korrekt angesehen werden darf. Die Quelldateien sind öffentlich unter `https://git.webschneider.org/uni/sammlung` einsehbar. Jeder ist dazu aufgerufen, sich an der Entwicklung zu beteiligen!

Inhaltsverzeichnis

1 Mengenlehre

1.1 Menge

Eine Zusammenfassung von unterschiedlichen Elementen zu einem Ganzen

1.2 Teilmenge

$$N \subset M \Leftrightarrow M \subset N \tag{1}$$

1.3 Potzenmenge

Sei M eine Menge.
$P(M)$ (auch 2^M):= Menge von allen Teilmengen von M. Sei l die Anzahl der Elemente von M, so ist die Anzahl der Möglichkeiten ist 2^l

1.4 Schnittmenge

$$M \cap N := \{x : x \in M \wedge x \in N\} \tag{2}$$

Die Schnittmenge besteht also aus den gemeinsamen Elementen der beiden Mengen. Falls $M \cap N = \emptyset$ sind, sind M und N *disjunkt*

1.5 Vereinigung

$$M \cup N = \{x : x \in M \vee x \in N\} \tag{3}$$

2 Relationen

Eine Relation ist zunächst eine Teilmenge beliebiger Mengen M, N. Man schreibt für ein beliebiges Paar aus $(x, y) \in M \times N$ entweder xRy oder seltener $(x, y) \in R$.

2.1 Eigenschaften

Zur Beschreibung einer Relation gibt es folgende Eigenschaften, dazu betrachten wir eine zweistellige Relation R auf M:

reflexiv	$\forall x \in M$ gilt xRx, das Element steht also zu sich selbst in Relation.
symmetrisch	$\forall x, y \in M$ aus xRy auch yRx folgt. Die Reihenfolge ist also egal.
transitiv	$\forall x, y, z \in M$ und xRy und yRz folgt xRz.

2.2 Äquivalenzrelation

Eine Relation heißt Äquivalenzrelation, wenn alle Eigenschaften aus 2.1 zutreffen.

3 Vektorräume

3.1 Vektorraum

Eine nichtleere Menge V heißt Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$, wenn die folgenden Eigenschaften zutreffen:
Addition

$$\begin{aligned} (u+v)+w &= u+(v+w) && \forall u,v,w \in V && (4)\\ u+v &= v+u && \forall u,v \in V && (5)\\ u+0 &= u && \forall u,v \in V && (6)\\ v+(-v) &= 0 && \forall v \in V && (7) \end{aligned}$$

Skalarmultiplikation:

$$\begin{aligned} (\alpha \cdot \beta) \cdot v &= \alpha \cdot (\beta \cdot v) && (8)\\ \alpha \cdot (u+v) &= \alpha \cdot u + \alpha \cdot v && (9)\\ (\alpha \cdot \beta) \cdot v &= \alpha \cdot (\beta \cdot v) && (10)\\ 1 \cdot v &= v && (11) \end{aligned}$$

3.2 Untervektorraum

Sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$. Dann ist $U \subset V$ ein Untervektorraum, wenn gilt:

1. U ist nicht leer, also muss mindestens $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$ gelten.
2. Die Addition muss abgeschlossen sein.
3. Die Skalarmultiplikation muss abgeschlossen sein.

3.3 Kombinationen

Voraussetzungen für die nächsten Definitionen: Seien $v_1, \ldots, v_m$ Elemente eines Vektorraums V über einem Skalarenkörper $\mathbb{K}$, und es sei $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ ein m-Tupel aus $\mathbb{K}^m$ für ein $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

3.3.1 Linearkombination

Eine Linearkombination ist eine Vektoraddition, bei der jeder Vektor einer Menge V zunächst mit einem Skalar α multipliziert wird.

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot v_j$$

3.3.2 Affinkombination

Wenn außerdem gilt, dass die Summe aller Koeffizienten 1 ergibt, also

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j = 1$$

dann spricht man von einer *Affinkombination*.

3.3.3 Konvexkombination

Wenn darüber hinaus $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist und

$$\alpha_j \in [0,1]\ \forall j, 1 \leq j \leq m$$

gilt, spricht man von einer *Konvexkombination*. Vergleiche zum Verständnis für Konvex die Definition auf Wikipedia[1]

[1] `https://de.wikipedia.org/wiki/Konvexe_Menge`