Zusammenfassung MafIA 1

Marcel Schneider
matheschneider@webschneider.org

13. Januar 2018

Vorwort

Dieses Dokument dient zur kurzen Zusammenfassung der wichtigsten Sätze und Definitionen. Ich füge hier nur nach Lust und Laune Dinge ein, so dass dies in keinster Weise als vollständig oder stets korrekt angesehen werden darf. Die Quelldateien sind öffentlich unter `https://git.webschneider.org/uni/sammlung` einsehbar. Jeder ist dazu aufgerufen, sich an der Entwicklung zu beteiligen!

Inhaltsverzeichnis

1 Mengenlehre

1.1 Menge

Eine Zusammenfassung von unterschiedlichen Elementen zu einem Ganzen
Beispiel: $M := \{\text{the, die, der, das}\}$ oder
$M := \{x|x \text{ ein bestimmter Artikel aus Englisch oder Deutsch}\}$

1.2 Teilmenge

$$N \subset M \Leftrightarrow M \supset N \tag{1}$$

Beispiel: $N := \{\text{the}\}$ ist eine Teilmenge von M, jedoch ist M keine Teilmenge von N, da nicht alle Elemente aus M in N sind.

1.3 Leere Menge

$$O := \{\} = \emptyset \tag{2}$$

Beispiel: $O := \{x|x \text{ ein Artikel aus dem chinesischen}\} = \emptyset$
Anmerkung: In der chinesischen Sprache gibt es keine Artikel

1.4 Potzenmenge

Sei M eine Menge.
$P(M)$ (auch 2^M):= Menge von allen Teilmengen von M. Sei l die Anzahl der Elemente von M, so ist die Anzahl der Möglichkeiten ist 2^l
Beispiel: $Q := \{1, 2, 3\} \Rightarrow P(Q) := \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

1.5 Schnittmenge

$$M \cap N := \{x : x \in M \wedge x \in N\} \tag{3}$$

Die Schnittmenge besteht also aus den gemeinsamen Elementen der beiden Mengen. Falls $M \cap N = \emptyset$ sind, sind M und N *disjunkt*
Beispiel: $M := \{\text{the, die, der, das}\}$ und $N := \{\text{der, die}\} \Rightarrow M \cap N := \{\text{der, die}\}$

1.6 Vereinigung

$$M \cup N = \{x : x \in M \vee x \in N\} \tag{4}$$

Die Vereinigung besteht als allen Elementen, die in M oder in N sind.
6 *Beispiel:* $M := \{\text{the}\}$ und $N := \{\text{der, die}\} \Rightarrow M \cup N := \{\text{the, der, die}\}$

1.7 Differenzmenge

$$M \setminus N = \{x : x \in M \wedge x \notin N\} \tag{5}$$

Die Differenzmenge besteht aus den Elementen aus M, die **nicht** in N sind.
Beispiel: $M := \{\text{the, die, der, das}\}$ und $N := \{\text{der, die}\} \Rightarrow M \setminus N := \{\text{the, das}\}$

1.8 Satz: Regeln für Mengen

Seien M, N und Q Mengen, dann gelten folgende Regeln:

1. $M \cap N = N \cap M$ ($\cap$ ist kommutativ)
2. $M \cup N = N \cup M$ ($\cup$ ist kommutativ)
3. $(M \cap N) \cap Q = M \cap (N \cap Q)$ ($\cap$ ist assoziativ)
4. $(M \cup N) \cup Q = M \cup (N \cup Q)$ ($\cup$ ist assoziativ)
5. $(M \cap N) \cup Q = (M \cup Q) \cap (N \cup Q)$ (distributiv)
6. $(M \cup N) \cap Q = (M \cap Q) \cup (N \cap Q)$ (distributiv)
7. $M \cap M = M$ (Eine Menge ist geschnitten mit sich selbst wieder die Menge)
8. $M \cup M = M$ (Eine Menge ist vereinigt mit sich selbst wieder die Menge)
9. $M \cap \emptyset = \emptyset$ (Eine Menge, geschnitten mit der leeren Menge, ist die leere Menge)
10. $M \cup \emptyset = M$ (Eine Menge, vereinigt mit der leeren Menge, ist die Menge selbst)

Zusammenfassend (1-6): Schnittmenge und Vereinigung sind kommutativ, assoziativ und distributiv

2 Relationen

Eine Relation ist zunächst eine Teilmenge beliebiger Mengen M, N. Man schreibt für ein beliebiges Paar aus $(x, y) \in M \times N$ entweder xRy oder seltener $(x, y) \in R$.

2.1 Eigenschaften

Zur Beschreibung einer Relation gibt es folgende Eigenschaften, dazu betrachten wir eine zweistellige Relation R auf M:

reflexiv	$\forall x \in M : xRx$, das Element steht also zu sich selbst in Relation.
symmetrisch	$\forall x, y \in M$ aus xRy auch yRx folgt. Die Reihenfolge ist also egal.
transitiv	$\forall x, y, z \in M$ und xRy und yRz folgt xRz.
antisymmetrisch	$\forall x, y \in M : xRy \land yRx \Rightarrow x = y$
total	$\forall x, y \in M : xRy \lor yRx$, also immer zwei Elemente in Relation stehen

Beispiel: antisymmetrisch: $3 \leq 3 \land 3 \geq 3 \Rightarrow 3 = 3$

2.2 Äquivalenzrelation

Eine Relation heißt Äquivalenzrelation, wenn die ersten drei Eigenschaften aus 2.1 (reflexiv, symmetrisch, transitiv) zutreffen.

2.3 Ordnungsrelation

Eine Relation heißt Ordnungsrelation, wenn sie total, reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

3 Abbildungen

3.1 Eigenschaften

Wir betrachten eine Abbildung $f : M \to N$.

injektiv	$\forall x, y \in M, x \neq y : f(x) \neq f(y)$
surjektiv	$\forall y \in N \exists x \in M : y = f(x)$
bijektiv	wenn f injektiv und surjektiv ist

Dabei bedeutet *injektiv*, dass unterschiedliche Eingaben unterschiedliche Ausgaben zur Folge haben, es wird also kein y-Wert zweimal getroffen. Das heißt auch, dass ein y-Wert nicht getroffen werden kann.
Surjektiv hingegen bedeutet, dass es zu jedem Bild ein mindestens Urbild gibt. Ein y kann also durch mehrere x getroffen werden, es gibt jedoch kein y, zu dem es keinen x-Wert gibt.

3.1.1 Beweise

Nachfolgend betrachten wir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto mx + b, m \neq 0$.
Um die *Injektivität* einer Funktion zu beweisen, nehmen wir die umgekehrte Definition, also $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Beweis. Zu zeigen: $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
Sei $f(x) = f(y)$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y) \\ mx + b &= my + b \\ mx &= my \\ x &= y \end{aligned}$$

Da $x = y$, ist f injektiv. □

Um *Surjektivität* zu zeigen, wird zunächst die Definition von x ermittelt:

$$\begin{aligned} f(x) &= y \\ mx + b &= y \\ mx &= y - b \\ x &= \frac{y - b}{m} \end{aligned}$$

Diese Definition macht man sich nun im Beweis zu nutze, um $f(x) = y$ für beliebige y zu zeigen:

Beweis. Sei $y \in \mathbb{R}$ beliebig. Aus vorheriger Berechnung ist bekannt: $x = \frac{y-b}{m}$

$$f(x) = f\left(\frac{y - b}{m}\right) = m \cdot \frac{y - b}{m} + b = y - b + b = y$$

Daraus resultiert, dass f surjektiv ist. □

Da f surjektiv und injektiv ist, folgt auch die *Surjektivität* für f.

4 Zahlen

4.1 Natürliche Zahlen

4.1.1 Peano-Axiome

Definition der natürlichen Zahlen durch Peano:

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. es gibt eine Nachfolgerabbildung $succ : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \backslash \{0\}$

3. *succ* ist injektiv
4. Ist $M \subseteq \mathbb{N}$ mit
   i. $0 \in M$
   ii. $m \in M \Rightarrow succ(m) \in M \forall m \in M$

   so gilt $M = \mathbb{N}$.

4.2 Gruppen

Eine nichtleere Menge G mit einer Verknüpfung $\circ$ heißt Gruppe, wenn die folgenden Eigenschaften zutreffen:

1. Assoziativität von $\circ$, also $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)\ \forall a, b, c \in G$
2. Es existiert ein neutrales Element e, für das gilt: $e \in G : a \circ e = a\ \forall a \in G$
3. Zu jedem Element gibt es ein Inverses a^{-1}, für das gilt: $a \circ a^{-1} = e$

Gilt darüber hinaus die *Kommutativität*

$$a \circ b = b \circ a \forall a, b \in G$$

heißt die Gruppe abelsch oder kommutativ.

5 Vektorräume

5.1 Vektorraum

Eine nichtleere Menge V heißt Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$, wenn die folgenden Eigenschaften zutreffen:
Addition

$$(u + v) + w = u + (v + w)\ \forall u, v, w \in V \tag{6}$$
$$u + v = v + u \qquad \forall u, v \in V \tag{7}$$
$$u + 0 = u \qquad \forall u, v \in V \tag{8}$$
$$v + (-v) = 0 \qquad \forall v \in V \tag{9}$$

Skalarmultiplikation:

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v) \tag{10}$$
$$\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v \tag{11}$$
$$(\alpha \cdot \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v) \tag{12}$$
$$1 \cdot v = v \tag{13}$$

5.1.1 Basis

Minimale Menge der Einheitsvektoren[1], mit denen alle anderen Vektoren erzeugt werden können. Die Vektoren untereinander sind linear unabhängig. Beispiel für $\mathbb{R}^2$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

5.2 Untervektorraum

Sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$. Dann ist $U \subset V$ ein Untervektorraum, wenn gilt:

1. U ist nicht leer, also muss mindestens $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$ gelten.
2. Die Addition muss abgeschlossen sein.
3. Die Skalarmultiplikation muss abgeschlossen sein.

5.3 Kombinationen

Voraussetzungen für die nächsten Definitionen: Seien $v_1, \ldots, v_m$ Elemente eines Vektorraums V über einem Skalarenkörper $\mathbb{K}$, und es sei $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ ein m-Tupel aus $\mathbb{K}^m$ für ein $m \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$.

5.3.1 Linearkombination

Eine Linearkombination ist eine Vektoraddition, bei der jeder Vektor einer Menge V zunächst mit einem Skalar α multipliziert wird.

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot v_j$$

5.3.2 Affinkombination

Wenn außerdem gilt, dass die Summe aller Koeffizienten 1 ergibt, also

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j = 1$$

dann spricht man von einer *Affinkombination*.

[1] Ein Vektor der Länge Eins, `https://de.wikipedia.org/wiki/Einheitsvektor`

5.3.3 Konvexkombination

Wenn darüber hinaus $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist und

$$\alpha_j \in [0, 1] \; \forall j, 1 \leq j \leq m$$

gilt, spricht man von einer *Konvexkombination*. Vergleiche zum Verständnis für Konvex die Definition auf Wikipedia[2]

[2] `https://de.wikipedia.org/wiki/Konvexe_Menge`