Zusammenfassung MafIA 1

Marcel Schneider
matheschneider@webschneider.org

5. Januar 2018

Vorwort

Dieses Dokument dient zur kurzen Zusammenfassung der wichtigsten Sätze und Definitionen. Ich füge hier nur nach Lust und Laune Dinge ein, so dass dies in keinster Weise als vollständig oder stets korrekt angesehen werden darf. Die Quelldateien sind öffentlich unter `https://git.webschneider.org/uni/sammlung` einsehbar. Jeder ist dazu aufgerufen, sich an der Entwicklung zu beteiligen!

Inhaltsverzeichnis

1 Mengenlehre

1.1 Menge

Eine Zusammenfassung von unterschiedlichen Elementen zu einem Ganzen

1.2 Teilmenge

$$N \subset M \Leftrightarrow M \subset N \tag{1}$$

1.3 Potzenmenge

Sei M eine Menge.
$P(M)$ (auch 2^M):= Menge von allen Teilmengen von M. Sei l die Anzahl der Elemente von M, so ist die Anzahl der Möglichkeiten ist 2^l

1.4 Schnittmenge

$$M \cap N := \{x : x \in M \wedge x \in N\} \tag{2}$$

Die Schnittmenge besteht also aus den gemeinsamen Elementen der beiden Mengen. Falls $M \cap N = \emptyset$ sind, sind M und N *disjunkt*

1.5 Vereinigung

$$M \cup N = \{x : x \in M \vee x \in N\} \tag{3}$$

2 Relationen

Eine Relation ist zunächst eine Teilmenge beliebiger Mengen M, N. Man schreibt für ein beliebiges Paar aus $(x, y) \in M \times N$ entweder xRy oder seltener $(x, y) \in R$.

2.1 Eigenschaften

Zur Beschreibung einer Relation gibt es folgende Eigenschaften, dazu betrachten wir eine zweistellige Relation R auf M:

reflexiv	$\forall x \in M : xRx$, das Element steht also zu sich selbst in Relation.
symmetrisch	$\forall x, y \in M$ aus xRy auch yRx folgt. Die Reihenfolge ist also egal.
transitiv	$\forall x, y, z \in M$ und xRy und yRz folgt xRz.
antisymmetrisch	$\forall x, y \in M : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$
total	$\forall x, y \in M : xRy \vee yRx$, also immer zwei Elemente in Relation stehen

Beispiel antisymmetrisch: $3 \leq 3 \wedge 3 \geq 3 \Rightarrow 3 = 3$

2.2 Äquivalenzrelation

Eine Relation heißt Äquivalenzrelation, wenn die ersten drei Eigenschaften aus 2.1 zutreffen.

2.3 Ordnungsrelation

Eine Ordnungsrelation ist besitzt die Eigenschaften total, reflexiv, antisymmetrisch und transitiv.

3 Abbildungen

3.1 Eigenschaften

Wir betrachten eine Abbildung $f : M \rightarrow N$.

injektiv	$\forall x, y \in M, x \neq y : f(x) \neq f(y)$
surjektiv	$\forall y \in N \exists x \in M : y = f(x)$
bijektiv	wenn f injektiv und surjektiv ist

Dabei bedeutet *injektiv*, dass unterschiedliche Eingaben unterschiedliche Ausgaben zur Folge haben, es wird also kein y-Wert zweimal getroffen. Das heißt auch, dass ein y-Wert nicht getroffen werden kann.

Surjektiv hingegen bedeutet, dass es zu jedem Bild ein mindestens Urbild gibt. Ein y kann also durch mehrere x getroffen werden, es gibt jedoch kein y, zu dem es keinen x-Wert gibt.

4 Vektorräume

4.1 Vektorraum

Eine nichtleere Menge V heißt Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$, wenn die folgenden Eigenschaften zutreffen:
Addition

$$
\begin{aligned}
(u+v)+w &= u+(v+w) && \forall u,v,w \in V && (4)\\
u+v &= v+u && \forall u,v \in V && (5)\\
u+0 &= u && \forall u,v \in V && (6)\\
v+(-v) &= 0 && \forall v \in V && (7)
\end{aligned}
$$

Skalarmultiplikation:

$$
\begin{aligned}
(\alpha \cdot \beta) \cdot v &= \alpha \cdot (\beta \cdot v) && (8)\\
\alpha \cdot (u+v) &= \alpha \cdot u + \alpha \cdot v && (9)\\
(\alpha \cdot \beta) \cdot v &= \alpha \cdot (\beta \cdot v) && (10)\\
1 \cdot v &= v && (11)
\end{aligned}
$$

4.1.1 Basis

Minimale Menge der Einheitsvektoren[1], mit denen alle anderen Vektoren erzeugt werden können. Die Vektoren untereinander sind linear unabhängig. Beispiel für $\mathbb{R}^2$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

4.2 Untervektorraum

Sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$. Dann ist $U \subset V$ ein Untervektorraum, wenn gilt:

1. U ist nicht leer, also muss mindestens $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$ gelten.
2. Die Addition muss abgeschlossen sein.
3. Die Skalarmultiplikation muss abgeschlossen sein.

4.3 Kombinationen

Voraussetzungen für die nächsten Definitionen: Seien $v_1, \ldots, v_m$ Elemente eines Vektorraums V über einem Skalarenkörper $\mathbb{K}$, und es sei $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ ein m-Tupel aus $\mathbb{K}^m$ für ein $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

[1] Ein Vektor der Länge Eins, `https://de.wikipedia.org/wiki/Einheitsvektor`

4.3.1 Linearkombination

Eine Linearkombination ist eine Vektoraddition, bei der jeder Vektor einer Menge V zunächst mit einem Skalar α multipliziert wird.

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot v_j$$

4.3.2 Affinkombination

Wenn außerdem gilt, dass die Summe aller Koeffizienten 1 ergibt, also

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j = 1$$

dann spricht man von einer *Affinkombination*.

4.3.3 Konvexkombination

Wenn darüber hinaus $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist und

$$\alpha_j \in [0, 1] \ \forall j, 1 \leq j \leq m$$

gilt, spricht man von einer *Konvexkombination*. Vergleiche zum Verständnis für Konvex die Definition auf Wikipedia[2]

Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons "Namensnennung – Nicht-kommerziell – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Deutschland" Lizenz.

[2] `https://de.wikipedia.org/wiki/Konvexe_Menge`