

Zusammenfassung Diskrete Mathematik

Marcel Schneider
matheschneider@webschneider.org

5. Februar 2018

Vorwort

Dieses Dokument dient zur kurzen Zusammenfassung der wichtigsten Sätze und Definitionen. Ich füge hier nur nach Lust und Laune Dinge ein, so dass dies in keinsten Weise als vollständig oder stets korrekt angesehen werden darf. Die Quelldateien sind öffentlich unter <https://git.webschneider.org/uni/sammlung> einsehbar. Jeder ist dazu aufgerufen, sich an der Entwicklung zu beteiligen!

Inhaltsverzeichnis

1	Abbildungen	1
1.1	Kompositionen	1
1.2	Umkehrfunktion	1
2	Zählen und Kombinatorik	1
2.1	Schubfachprinzip	1
2.2	Zählformen	1
2.2.1	Summenformel und Produktformel	1
2.2.2	Binomialkoeffizient	2
2.2.3	Binomialsatz	2
2.2.4	Siebformel	2
2.2.5	Permutationen	2
2.2.6	Kombination mit Wiederholung	3
2.2.7	Wann nehme ich was?	3
3	Rekursion	3
3.1	Lineare Rekursion	3
3.1.1	Geometrische Summenformel	4
3.2	Wachstum von Funktionen	4
3.3	Master-Theorem	4

4	Graphentheorie	5
4.1	Ungerichtete Graphen	5
4.1.1	Kreis	5
4.1.2	Eulerscher Kreis	5
4.1.3	Eulerscher Graph	5
4.1.4	Zusammenhangskomponente	5
4.1.5	Offene Eulersche Linie	5
4.2	Bäume	6
4.2.1	Definition	6
4.2.2	Binärer Baum	6
4.3	Wurzelbaum und Suchtheorie	6
4.3.1	Wurzelbaum	6
4.3.2	(n, q)-Baum	6
4.3.3	Informationstheoretische Schranke	6
4.3.4	Die Kraftsche Ungleichung	7
4.3.5	Erwartete Länge	7
4.3.6	Der Hauptsatz der Informationstheorie	7
4.4	Der Huffman-Algorithmus	7
4.4.1	Vorbereitungen	7

Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons
 “Namensnennung – Nicht-kommerziell – Weitergabe unter
 gleichen Bedingungen 3.0 Deutschland” Lizenz.



1 Abbildungen

Man beachte auch das Mafia-Skript.

1.1 Kompositionen

Kompositionen von Funktionen sind *assoziativ*.

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion:

- i. f ist injektiv $\leftrightarrow \exists g : Y \rightarrow X$, sodass $g \circ f = id_x$
- ii. f ist surjektiv $\leftrightarrow \exists g : Y \rightarrow X$, sodass $f \circ g = id_y$
- iii. f ist bijektiv $\leftrightarrow \exists g : Y \rightarrow X$, sodass $g \circ f = id_x, f \circ g = id_y$

1.2 Umkehrfunktion

Seien X, Y Mengen und die Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ eine Bijektion. Dann gibt es eine eindeutige Funktion $g : Y \rightarrow X$ mit $g(y) = x$, wobei $f^{-1}(y) = \{x\}$. Diese wird *Umkehrfunktion* oder *Inverse* von f bezeichnet.

2 Zählen und Kombinatorik

2.1 Schubfachprinzip

Das Schubfachprinzip besagt, wenn m Objekte in n Kategorien (*Schubfächer*) eingeteilt werden, gibt es mindestens eine Kategorie, in der mindestens zwei Objekte eingeteilt sind.

2.2 Zählformen

Bei endlichen Mengen gibt $|A|$ die Anzahl der Elemente (*Kardinalität*) an.

2.2.1 Summenformel und Produktformel

Bei endlichen Mengen A, B gilt die *Summenformel*:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Ausserdem gilt die *Produktformel*, auch für eine endliche Menge von Mengen:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

2.2.2 Binomialkoeffizient

Der *Binomialkoeffizient* dient dazu, die möglichen Kombinationen von k Objekten aus insgesamt n verschiedenen Elementen zu ermitteln. Dabei ist die Reihenfolge unerheblich und es wird nicht zurückgelegt. Die Definition ist wie folgt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Satz 2.2.1. Seien $k, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

2.2.3 Binomialsatz

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Es gilt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Satz 2.2.2. 1.

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n, \quad \forall k, n \in \mathbb{N}_0$$

2.

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \dots = 0$$

2.2.4 Siebformel

Mithilfe der *Siebformel* kann die Kardinalität einer Menge durch die Kardinalitäten ihrer Teilmengen bestimmt werden.

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_s| = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 \pm \dots + (-1)^{s-1} \cdot \alpha_s$$

Dabei werden die α berechnet, indem man den Durchschnitt von je i Mengen bildet und deren Mächtigkeit summiert.

2.2.5 Permutationen

Eine *Permutation* von $n \in \mathbb{N}$ Elementen $\pi : \{1, \dots, n\} \mapsto \{1, \dots, n\}$ ist eine Bijektion. Ein Element k daraus heißt *Fixpunkt*, wenn $\pi(k) = k$ ist.

Anzahl der Permutationen Von n Elementen gibt es genau $n!$ Permutationen, und $(n-1)!$ Permutationen mit dem Fixpunkt k . Die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen ist

$$n! \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2} - \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!}$$

Satz 2.2.3. Die Anzahl der nicht-surjektiven Abbildungen $f : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ ist gleich

$$\sum_{m=1}^k (-1)^{m-1} \binom{n}{m} (n-m).$$

Die Anzahl der Surjektionen beträgt

$$\sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} (n-m)^k$$

2.2.6 Kombination mit Wiederholung

Wenn die Reihenfolge egal ist und Wiederholungen erlaubt sind, wird eine angepasste Version des Binomialkoeffizienten genutzt:

$$\binom{n+k-1}{k}$$

2.2.7 Wann nehme ich was?

Reihenfolge egal, ohne Zurücklegen Binomialkoeffizient
 Reihenfolge egal, mit Zurücklegen Kombination mit Wiederholung

3 Rekursion

3.1 Lineare Rekursion

Angenommen $T : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ erfüllt die *lineare Rekursion*

$$T(n) = r \cdot T(n-1) + a, \quad a, r \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

$$T(0) = b.$$

Dann ist die Lösung:

$$T(n) = r^n T(1) + a \sum_{i=0}^{n-1} r^i, \quad n \in \mathbb{N}_0, r = 1$$

$$T(n) = r^n T(1) + a \frac{1-r^n}{1-r}, \quad \text{für } r \neq 1$$

3.1.1 Geometrische Summenformel

Es gilt:

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

3.2 Wachstum von Funktionen

Seien $f, g : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$.

Abschätzung nach oben

Eine Funktion kann nach oben asymptotisch abgeschätzt werden, wenn $\exists c > 0$, s.d. $|f(n)| \leq c \cdot |g(n)|$, für $n \geq n_0$. Man schreibt dann $f(n) = O(g(n))$, $O(g(n))$ enthält also alle Funktionen, durch die $f(n)$ nach oben asymptotisch abgeschätzt wird.

Abschätzung nach unten

Wenn $\exists c > 0$, so dass $|f(n)| \geq c \cdot |g(n)|$, schreibt man $f(n) = \Omega(g(n))$. So wächst $f(n)$ also schneller als $g(n)$.

Abschätzung nach oben und unten Die Kombination von O und Ω heißt Θ . Also ist $f(n) = \Theta$, wenn $\exists c_1, c_2$, so dass $c_1 \cdot |g(n)| \leq |f(n)| \leq c_2 \cdot |g(n)|$.

3.3 Master-Theorem

Das *Master-Theorem* lässt sich auf Rekursionen der folgenden Struktur anwenden:

$$\begin{aligned} T(n) &= a \cdot T(\lceil n/b \rceil) + c(n), n > n_0 \\ T(n) &= \Theta(1), n \leq n_0 \end{aligned}$$

c muss dabei monoton wachsend sein. Nun gilt:

1. Ist $c(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a - \varepsilon})$ für ein ε mit $0 < \varepsilon < \log_b a$, so ist

$$T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a})$$

2. Ist $c(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, so ist

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \log_b n)$$

3. Erfüllt c die Bedingung $\exists \gamma \in (0, 1)$, so dass $ac(\lceil n/b \rceil) \leq \gamma c(n)$ für ein hinreichend großes n und ist $c(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$, so ist

$$T(n) = \Theta(c(n))$$

Zahlreiche Übungen lassen sich im Internet finden¹.

¹<http://www.csd.uwo.ca/~moreno/CS433-CS9624/Resources/master.pdf>

4 Graphentheorie

4.1 Ungerichtete Graphen

4.1.1 Kreis

Ein geschlossener Kantenzug mit k_1, k_2, \dots, k_s , der die Ecken $e_1, e_2, \dots, e_s = e_0$ miteinander verbindet. Alle Kanten müssen dabei unterschiedlich sein. Die Länge des Kreises beschreibt die Anzahl der Kanten oder Ecken.

4.1.2 Eulerscher Kreis

Ein Kreis C in einem Graph G heißt eulersch, wenn jede Kante aus G in ihm genau einmal vorkommt.

4.1.3 Eulerscher Graph

Ein Graph heißt eulersch, wenn er einen eulerschen Kreis besitzt. Jede Ecke eines eulerschen Graphen hat geraden Grad. Besitzt also eine Ecke des Graphen ungeraden Grad, so ist es kein eulerscher Graph.

4.1.4 Zusammenhangskomponente

Ein maximaler, zusammenhängender Teilgraph G^* eines Graphen G .

4.1.5 Offene Eulersche Linie

Ein Weg in einem Graph G heißt *offene Eulersche Linie*, wenn jede Kante genau einmal enthalten ist und *keinen* Kreis enthält.

Satz 4.1.1. *Sei G ein Graph.*

1. *Besitzt G eine offene eulersche Linie, so hat G genau zwei Ecken ungeraden Grades.*
2. *Ist G zusammenhängend und hat genau zwei Ecken ungeraden Grades, so hat G eine offene eulersche Linie.*

Satz 4.1.2. *Ein Graph G ist genau dann bipartit, wenn alle Kreise in G eine gerade Länge haben.*

4.2 Bäume

4.2.1 Definition

Ein *Baum* ist ein zusammenhängender Graph G , der keine Kreise positiver Länge enthält. Als *Blatt* wird eine Ecke mit Grad 1 bezeichnet.

Satz 4.2.1. *Jeder Baum mit mindestens 2 Ecken hat eine Ecke.*

Satz 4.2.2. *Ist G ein Baum mit n Ecken und m Kanten, so ist $m = n - 1$*

Satz 4.2.3. *Sei G ein zusammenhängender Graph mit n Ecken und M Kanten. Dann ist $m \geq n - 1$ mit Gleichheit genau dann, wenn G ein Baum ist.*

4.2.2 Binärer Baum

Ein *binärer Baum* ist ein Baum G mit den Eigenschaften

- i. Es gibt eine eindeutige Ecke *Wurzel*, mit dem Grad 2
- ii. alle andere Ecken haben entweder den Grad 3 oder 1 (Blätter).

Die Höhe des Baumes ist die maximale Länge eines Weges, der die Wurzel als eine Ecke hat.

Satz 4.2.4. 1. *Ein binärer Baum der Höhe h hat höchstens 2^h Blätter.*

2. *Ein binärer Baum G mit b Blättern hat die Höhe $h \geq \lceil \log_2 b \rceil$*

4.3 Wurzelbaum und Suchtheorie

4.3.1 Wurzelbaum

Ein *Wurzelbaum* ist ein Paar (T, v) , wobei T ein Baum ist und v eine ausgezeichnete Ecke, als so genannte *Wurzel*.

Die *Länge einer Ecke* $l(e)$, $e \in E$ bezeichnet den eindeutigen Weg von v nach e . Die Länge des gesamten Baumes ist die maximale Länge einer Ecke.

4.3.2 (n, q) -Baum

Besitzt ein Baum n Blätter und hat die Wurzel höchstens q direkte Nachfolger, spricht man von einem (n, q) -Baum. Besitzt die Wurzel und jede innere Ecke genau q direkte Nachfolger, ist dies ein *vollständiger (n, q) -Baum*

Satz 4.3.1. *Sei T ein (n, q) -Baum, wobei $n \geq 1, q \geq 2$. Dann ist $l(T) = \lceil \log_q n \rceil$*

4.3.3 Informationstheoretische Schranke

Die Menge $\mathcal{T}(n, q)$ beschreibt alle (n, q) -Bäume. Die Zahl $\log_q n = \min\{l(T) | T \in \mathcal{T}(n, q)\}$ heisst die *informationstheoretische Schranke* bzgl. (n, q) .

4.3.4 Die Kraftsche Ungleichung

1. Sei T ein (n, q) -Baum mit Blättern $1, \dots, n$ der Längen $l_1, l_2, \dots, l_n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $\sum_{i=1}^n q^{-l_i} \leq 1$ und die Gleichheit gilt genau dann, wenn T vollständig ist.
2. Sind $l_1, \dots, l_n \in \mathbb{N}_0$, so dass $\sum_{i=1}^n q^{-l_i} \leq 1$, so existiert ein (n, q) -Baum mit Blättern b_1, \dots, b_n , so dass $l(b_i) = l_i, i = 1, \dots, n$

4.3.5 Erwartete Länge

Sei T ein (n, q) -Baum mit den Blättern $1, \dots, n$ und sei $l_i = l(i)$ die Länge des i -ten Blattes. Sei weiter $(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf den Blättern, d.h. $p_i \in [0, 1]$ für $i = 1, \dots, n$ und $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Die *erwartete Länge* $\bar{L}(T)$ von T ist definiert als

$$\bar{L}(T) = \sum_{i=1}^n p_i l_i.$$

Weiter sei

$$\bar{L}(p_1, \dots, p_n) := \min \{ \bar{L}(T) \mid T \in \mathcal{T}(n, q) \}$$

Ein Baum heißt *optimal*, falls $\bar{L}(T) = \bar{L}(p_1, \dots, p_n)$

4.3.6 Der Hauptsatz der Informationstheorie

Sei $n \geq 1$ und sei $q \geq 2$. Sei weiter (p_1, \dots, p_n) eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\{1, \dots, n\}$. Dann gilt

$$-\sum_{i=1}^n p_i \log_q p_i \leq \bar{L}(p_1, \dots, p_n) \leq -\sum_{i=1}^n p_i \log_q p_i + 1,$$

wobei $0 \cdot \log_q 0$ als 0 zu interpretieren ist. (Da $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \log_q x = 0$)

4.4 Der Huffman-Algorithmus

4.4.1 Vorbereitungen

Sei $n \geq 1, q \geq 2$ Sei (p_1, \dots, p_n) eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\{1, \dots, n\}$, so dass $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n \geq 0$. Dann existiert ein optimaler (n, q) -Baum T für (p_1, \dots, p_n) , so dass

1. für die Blätter b_1, \dots, b_n gilt $l(b_1) \leq l(b_2) \leq \dots \leq l(b_n)$. Weiter sind die letzten q Blätter b_{n-q+1}, \dots, b_n von der maximalen Länge $L(T)$.
2. T ist vollständig.

Index

(n,q)-Baum, 6

Abschätzung nach oben, 4

Abschätzung nach oben und unten, 4

Abschätzung nach unten, 4

Baum, 6

Binomialkoeffizient, 2

binärer Baum, 6

Blatt, 6

erwartete Länge, 7

Fixpunkt, 2

informationstheoretische Schranke, 6

Inverse, 1

Kardinalität, 1

lineare Rekursion, 3

Länge einer Ecke, 6

Master-Theorem, 4

offene Eulersche Linie, 5

optimal, 7

Permutation, 2

Produktformel, 1

Schubfach, 1

Siebformel, 2

Summenformel, 1

Umkehrfunktion, 1

vollständiger (n, q)-Baum, 6

Wurzel, 6

Wurzelbaum, 6