Zusammenfassung MafIA 1

Marcel Schneider Maik Wegener
matheschneider@webschneider.org

30. Januar 2018

Vorwort

Dieses Dokument dient zur kurzen Zusammenfassung der wichtigsten Sätze und Definitionen. Ich füge hier nur nach Lust und Laune Dinge ein, so dass dies in keinster Weise als vollständig oder stets korrekt angesehen werden darf. Sollten Fehler gefunden werden, bitte per Mail darüber informieren, dann können diese hier berichtigt werden. Auch Issues im Git sind gerne gesehen. Die Quelldateien sind öffentlich unter `https://git.webschneider.org/uni/sammlung` einsehbar. Jeder ist dazu aufgerufen, sich an der Entwicklung zu beteiligen!

Inhaltsverzeichnis

1 Mengenlehre

1.1 Menge

Eine Zusammenfassung von unterschiedlichen Elementen zu einem Ganzen
Beispiel: $M := \{\text{the, die, der, das}\}$ oder
$M := \{x|x \text{ ein bestimmter Artikel aus Englisch oder Deutsch}\}$

1.2 Teilmenge

$$N \subset M \Leftrightarrow M \supset N \tag{1}$$

Beispiel: $N := \{\text{the}\}$ ist eine Teilmenge von M, jedoch ist M keine Teilmenge von N, da nicht alle Elemente aus M in N sind.

1.3 Leere Menge

$$O := \{\} = \emptyset \tag{2}$$

Beispiel: $O := \{x|x \text{ ein Artikel aus dem chinesischen}\} = \emptyset$
Anmerkung: In der chinesischen Sprache gibt es keine Artikel

1.4 Potzenmenge

Sei M eine Menge.
$P(M)$ (auch 2^M):= Menge von allen Teilmengen von M. Sei l die Anzahl der Elemente von M, so ist die Anzahl der Möglichkeiten ist 2^l
Beispiel: $Q := \{1, 2, 3\} \Rightarrow P(Q) := \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

1.5 Schnittmenge

$$M \cap N := \{x : x \in M \wedge x \in N\} \tag{3}$$

Die Schnittmenge besteht also aus den gemeinsamen Elementen der beiden Mengen. Falls $M \cap N = \emptyset$ sind, sind M und N *disjunkt*
Beispiel: $M := \{\text{the, die, der, das}\}$ und $N := \{\text{der, die}\} \Rightarrow M \cap N := \{\text{der, die}\}$

1.6 Vereinigung

$$M \cup N = \{x : x \in M \vee x \in N\} \tag{4}$$

Die Vereinigung besteht als allen Elementen, die in M oder in N sind.
6 *Beispiel:* $M := \{\text{the}\}$ und $N := \{\text{der, die}\} \Rightarrow M \cup N := \{\text{the, der, die}\}$

1.7 Differenzmenge

$$M \backslash N = \{x : x \in M \wedge x \notin N\} \tag{5}$$

Die Differenzmenge besteht aus den Elementen aus M, die **nicht** in N sind.
Beispiel: $M := \{\text{the, die, der, das}\}$ und $N := \{\text{der, die}\} \Rightarrow M \backslash N := \{\text{the, das}\}$

1.8 Satz: Regeln für Mengen

Seien M, N und Q Mengen, dann gelten folgende Regeln:

1. $M \cap N = N \cap M$ ($\cap$ ist kommutativ)
2. $M \cup N = N \cup M$ ($\cup$ ist kommutativ)
3. $(M \cap N) \cap Q = M \cap (N \cap Q)$ ($\cap$ ist assoziativ)
4. $(M \cup N) \cup Q = M \cup (N \cup Q)$ ($\cup$ ist assoziativ)
5. $(M \cap N) \cup Q = (M \cup Q) \cap (N \cup Q)$ (distributiv)
6. $(M \cup N) \cap Q = (M \cap Q) \cup (N \cap Q)$ (distributiv)
7. $M \cap M = M$ (Eine Menge ist geschnitten mit sich selbst wieder die Menge)
8. $M \cup M = M$ (Eine Menge ist vereinigt mit sich selbst wieder die Menge)
9. $M \cap \emptyset = \emptyset$ (Eine Menge, geschnitten mit der leeren Menge, ist die leere Menge)
10. $M \cup \emptyset = M$ (Eine Menge, vereinigt mit der leeren Menge, ist die Menge selbst)

Zusammenfassend (1-6): Schnittmenge und Vereinigung sind kommutativ, assoziativ und distributiv

2 Relationen

Eine Relation ist zunächst eine Teilmenge beliebiger Mengen M, N. Man schreibt für ein beliebiges Paar aus $(x, y) \in M \times N$ entweder xRy oder seltener $(x, y) \in R$.

2.1 Eigenschaften

Zur Beschreibung einer Relation gibt es folgende Eigenschaften, dazu betrachten wir eine zweistellige Relation R auf M:

reflexiv	$\forall x \in M : xRx$, das Element steht also zu sich selbst in Relation.
symmetrisch	$\forall x, y \in M$ aus xRy auch yRx folgt. Die Reihenfolge ist also egal.
transitiv	$\forall x, y, z \in M$ und xRy und yRz folgt xRz.
antisymmetrisch	$\forall x, y \in M : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$
total	$\forall x, y \in M : xRy \vee yRx$, also immer zwei Elemente in Relation stehen

Beispiel: antisymmetrisch: $3 \leq 3 \wedge 3 \geq 3 \Rightarrow 3 = 3$

2.2 Äquivalenzrelation

Eine Relation heißt Äquivalenzrelation, wenn die ersten drei Eigenschaften aus 2.1 (reflexiv, symmetrisch, transitiv) zutreffen.

2.3 Ordnungsrelation

Eine Relation heißt Ordnungsrelation ($\prec$), wenn sie total, reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.
Beispiel: Sei $M = \mathbb{R}, \prec \rightarrow \leq$: $x \leq y$

2.3.1 Halbe Ordnung

$\prec$ heißt eine Halbordnung auf M, wenn Reflexivität, Transitivität und Antisymmetrie gegeben sind für $x \prec y$ für $x, y \in M$

2.3.2 Ganze Ordnung

$\prec$ heißt eine ganze Ordnung, wenn alle $x, y \in M$ entweder $x \prec y$ oder $y \prec x$ erfüllen.

3 Abbildungen

3.1 Definition

Eine Abbildung f einer Menge $U \subset M$ auf eine Menge N ist eine Vorschrift, die jedem $x \in M$ (Urbild) genau ein Element $y \in N$ (Bild von x) zuordnet. Dabei ist U die *Urbildmenge* und N die *Bildmenge*. Weiter ist U die Domain (*Definitionsbereich*) von f in M ($U = dom(f)$)

Eine Abbildung f von einer Menge M in eine Menge $Y \subset N$ ist gegeben durch eine Relation:
R_f zwischen M und N, bei der jedes $x \in M$ mit genau einem $y \in N$ in Relation steht: $(x, y) \in R_f$ und $(x, \tilde{y}) \in R_f \Rightarrow y = \tilde{y}$. Wir schreiben in diesem Fall $f(x) = y$

3.1.1 Verknüpfte Abbildungen

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \text{ wobei } g : M \to N \text{ und } f : N \to P \Rightarrow f \circ g : M \to P \tag{6}$$

3.2 Eigenschaften

Wir betrachten eine Abbildung $f : M \to N$.

injektiv	$\forall x, y \in M, x \neq y : f(x) \neq f(y)$
surjektiv	$\forall y \in N \exists x \in M : y = f(x)$
bijektiv	wenn f injektiv und surjektiv ist

Dabei bedeutet *injektiv*, dass unterschiedliche Eingaben unterschiedliche Ausgaben zur Folge haben, es wird also kein y-Wert zweimal getroffen. Das heißt auch, dass ein y-Wert nicht getroffen werden kann.
Surjektiv hingegen bedeutet, dass es zu jedem Bild ein mindestens Urbild gibt. Ein y kann also durch mehrere x getroffen werden, es gibt jedoch kein y, zu dem es keinen x-Wert gibt.

3.2.1 Beweise

Nachfolgend betrachten wir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto mx + b, m \neq 0$.
Um die *Injektivität* einer Funktion zu beweisen, nehmen wir die umgekehrte Definition, also $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Beweis. Zu zeigen: $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
Sei $f(x) = f(y)$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y) \\ mx + b &= my + b \\ mx &= my \\ x &= y \end{aligned}$$

Da $x = y$, ist f injektiv. □

Um *Surjektivität* zu zeigen, wird zunächst die Definition von x ermittelt:

$$\begin{aligned} f(x) &= y \\ mx + b &= y \\ mx &= y - b \\ x &= \frac{y - b}{m} \end{aligned}$$

Diese Definition macht man sich nun im Beweis zu nutze, um $f(x) = y$ für beliebige y zu zeigen:

Beweis. Sei $y \in \mathbb{R}$ beliebig. Aus vorheriger Berechnung ist bekannt: $x = \frac{y-b}{m}$

$$f(x) = f\left(\frac{y-b}{m}\right) = m \cdot \frac{y-b}{m} + b = y - b + b = y$$

Daraus resultiert, dass f surjektiv ist. □

Da f surjektiv und injektiv ist, folgt auch die *Bijektivität* für f.

3.2.2 Regeln für Abbildungen

Satz:

a. Sind f und g injektiv, so ist $f \circ g$ injektiv

b. Sind f und g surjektiv, so ist $f \circ g$ surjektiv

c. Sind f und g bijektiv, so ist $f \circ g$ bijektiv

d. Ist $f \circ g$ injektiv, so ist auch g injektiv

e. Ist $f \circ g$ surjektiv, so ist auch f surjektiv

f. Ist $f \circ g$ bijektiv, so ist f injektiv und g surjektiv

Die Beweise zu a. — f. werden zur **Übung** gelassen. Teilweise wurden sie schon in der Vorlesung gezeigt.
Anmerkung: : In der Vorlesung wurde noch kurz Russels Paradoxon[1] angesprochen:

$$R := \{x \in \Omega | x \notin \{x\}\} \subset \Omega$$
$$R \in R \Leftrightarrow R \notin \{R\}$$

4 Sprache und Logik

4.1 Grundlagen

4.1.1 Zeichen, Alphabete, Worte, Sprachen

Definition:

1. Ein Zeichen ist ein Symbol (*Beispiel:* x oder $\in$)
2. Eine Zeichenkette ist eine Aneinanderreihung von Zeichen (*Beispiel:* $x \in M$ oder `"diesisteineZeichenkette"`)

[1] `https://de.wikipedia.org/wiki/Barbier-Paradoxon` bzw. `https://de.wikipedia.org/wiki/Russellsche_Antinomie`

3. Ein Alphabet ist eine endliche Menge von Zeichen
4. Ein Wort oder Satz das Länge n über einem Alphabet A ist eine Verkettung von n Zeichen aus A. Das leere Word wird mit ε bezeichnet.
   A^n ist die Menge aller Wörter der Länge n[2]
5. Die freie Sprache S über einem Alphabet A ist eine Teilmenge von $A*$

4.1.2 Wahrheitswerte

Definition: Die Menge B der Wahrheitstabelle ist wie folgt definiert:

$$B := \{\text{wahr, falsch}\} = \{\text{true, false}\} = \{W, F\} = \{1, 0\} \tag{7}$$

Definition: Sei S eine Sprache über einem Alphabet A. Sei T eine Teilmenge von S und es gebe eine Abbildung $I : T \to B$. Dann heißen die Elemente von T logische *Aussagen* und die die Abbildung I heißt *Interpretation*[3]
Beispiel: 2 ist kleiner als 7
Definition: Ein n-stelliges Prädikat auf M ist eine Abbildung von $M^n \to B$.

$$\Rightarrow \text{Relation } r : M^n \to B, r(x) := \begin{cases} \text{wahr, wenn } x \in R \\ \text{falsch, wenn } x \notin R \end{cases}$$

4.1.3 Grundoperationen der Aussagenlogik

1. Negation $\neg A$: es ist nicht wahr, dass A wahr ist
2. Konjunktion $A \wedge B$: A und B
3. Disjunktion $A \vee B$: A oder B
4. Implikation $A \Rightarrow B$: Aus A folgt B
5. Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$: A genau dann wenn B

Anmerkung: Etwas übersichtlicher sind die Operationen in Tabellenform:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w
f	w	w	f	w	w	f
w	f	f	f	w	f	f
f	f	w	f	f	w	w

Abbildung 1: Grundoperationen der Aussagenlogik

Satz:

[2]nicht zu verwechseln mit einem Produktraum von Alphabeten $(A \times A \times A \times \dots)$
[3]Anschaulicher: Aussagen sind Sprachsätze, die unter einer gegeben Interpretation einen Wahrheitswert haben

1. $p \wedge q = q \wedge p$ (Kommutativität)
2. $p \vee q = q \vee p$ (Kommutativität)
3. $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$ (Assoziativität)
4. $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$ (Assoziativität)
5. $(p \wedge q) \vee r = (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ (Distributitivät von $\wedge$ und $\vee$)
6. $(p \vee q) \wedge r = (p \wedge r) \vee (p \wedge r)$ (Distributitivät von $\vee$ und $\wedge$)
7. $p \wedge p = p$ (Idempotenz)
8. $p \vee p = p$ (Idempotenz)
9. $\neg(p \wedge q) = (\neg p) \vee (\neg q)$ (Morgensche Regel)
10. $\neg(p \vee q) = (\neg p) \wedge (\neg q)$ (Morgensche Regel)
11. $\neg(\neg(q)) = q$

4.1.4 Beweistechnik

Es gibt verschiedene Wege eine Behauptung zu beweisen. Drei wurden in der Vorlesung behandelt:

1. Direkter Beweis $p \to q$: Sei p, dann zeigen wir, dass q wahr ist
2. indirekter oder Widerspruchsbeweis (Kontrapositiv)
3. Beweis durch vollstaendige Induktion

Induktionsbeweis:
Grundsätzliches Schema:
Sei $P : \mathbb{N} \to B$ ein Prädikat auf $\mathbb{N}$ ($P(n)$ ist wahr oder falsch $\forall n \in \mathbb{N}$). Dann ist folgendes zu zeigen:

1. Induktionsanfang: $P(0)$ ist wahr
2. $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: Aus $P(n)$ ist wahr $\to P(succ(n))$ ist wahr.

Dann folgt: P ist allgemeingültig über $\mathbb{N}$, d.h. $P(n)$ ist wahr $\forall n \in \mathbb{N}$[4]

4.2 Boolesche Funktionen

Sei $B := \{0, 1\}$. Dann existiert eine Abbildung $f : B^n \to B$.
Beispiel: $f(A) = \neg(A)$

[4] Beispiele zur Induktion gibts auf den Übungsblättern oder im Skript

4.2.1 Prädikatenlogik

Sei P ein Prädikat auf M

- P ist erfüllbar, wenn $P(x)$ wahr ist für mindestens ein $x \in M$

  $\exists x \in M$ sodass $P(x)$ wahr ist
- P ist allgemeingültig, wenn $P(x)$ wahr ist, wenn $x \in M$

  $(\forall x \in M)P(x)$ ist wahr

4.3 Negation von Quantoren

- $\neg(P(x)\forall x \in M) \Leftrightarrow \exists x \in M$ sodass $\neg P(x)$
- $\neg(\exists x \in M$ sodass $P(x)) \Leftrightarrow \forall x \in M, \neg P(x)$

4.4 Mengen und Logik - Bitvektoren

Sei $M := x_1, \ldots, x_n, N \subseteq M$. Bitvektoren $B_N := (b_1, \ldots, b_n), b_j = \begin{cases} 1, & \text{falls } x_j \in N \\ 0, & \text{falls } x_j \notin N \end{cases}$

Seien K und $L \subseteq M, L \cap K, L \cup K$, dann sind:

- $B_{L\cap K} = B_L \wedge B_K$
- $B_{L\cup K} = B_L \vee B_K$
- $B_{L^0} = 1 - B_L$ (Bitinversion)
- $\overline{L} = M \backslash L$
- $L^0 = M \backslash L$

Anmerkung: Die Anzahl aller möglichen Teilmengen von $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$ (bei endlicher Potenzmenge) ist äquivalent zur Anzahl der Bitvektoren mit m Komponenten

4.5 Mächtigkeit

Definition: Zwei Mengen M und Ω heißen gleichmächtig, wenn es eine bijektive Abbildung $f : M \to \Omega$ gibt
Satz:

a) Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Mengen

b) Endliche Mengen mit gleicher Anzahl an Elementen sind gleichmächtig

Beispiel: Sei $M := \{x_1, \ldots, x_n\}$
$|P(M)| = |P(B_M)| = 2^M$

4.6 Boolesche Algebra

Gegeben sei R, eine Relation auf dem kartesischen Produkt $M \times N = \{x_1, \dots, x_n\} \times \{y_1, \dots, y_n\}$

	y_1	...	y_n
x_1	b_{11}	...	b_{1n}
...	...		
x_m	b_{m1}	...	b_{mn}

Abbildung 2: Die Relation $x_i R y_j$

Falls $M = N$ ist $m = n$

- für R reflexiv, ist $b_{ij} = 1$
- für R symmetrisch, ist $b_{ij} = b_{ji}$

5 Zahlen

5.1 Allgemein

Es wurden in der Vorlesung folgende Arten von Zahlen behandelt:

- natürliche Zahlen $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, ...\}$
- ganze Zahlen $\mathbb{Z} := \{..., -1, 0, 1, ...\}$
- rationale Zahlen $\mathbb{Q} := \{x = \frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z}\}$
- reele Zahlen $\mathbb{R}$: z.B. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
- komplexe Zahlen $\mathbb{C} := \{z = x + \sqrt{-1} \cdot y \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

5.2 Natürliche Zahlen

5.2.1 Peano-Axiome

Definition der natürlichen Zahlen durch Peano:

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. es gibt eine Nachfolgerabbildung $succ : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \backslash \{0\}$
3. $succ$ ist injektiv
4. Ist $M \subseteq \mathbb{N}$ mit
   i. $0 \in M$

ii. $m \in M \Rightarrow succ(m) \in M \forall m \in M$

so gilt $M = \mathbb{N}$.

5.3 Gruppen

Eine nichtleere Menge G mit einer Verknüpfung $\circ$ heißt Gruppe, wenn die folgenden Eigenschaften zutreffen:

1. Assoziativität von $\circ$, also $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)\ \forall a, b, c \in G$
2. Es existiert ein neutrales Element e, für das gilt: $e \in G : a \circ e = a\ \forall a \in G$
3. Zu jedem Element gibt es ein Inverses a^{-1}, für das gilt: $a \circ a^{-1} = e$

Gilt darüber hinaus die *Kommutativität*

$$a \circ b = b \circ a \forall a, b \in G$$

heißt die Gruppe abelsch oder kommutativ.
Beispiel:

- $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (, +)$ sind Gruppen
- $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist keine Gruppe (inverses Element ist nicht in $\mathbb{Z}$)
- $(\mathbb{Q} \backslash \{0\}, \cdot)$ und $(\mathbb{R} \backslash \{0\}, \cdot)$ sind abelsche Gruppen

Fakt: Seien $(G, \cdot)$ und $(H, *)$ Gruppen. Dann ist $(G \times H, 0)$ mit $(g, h)(\in (G \times H)) \circ (g', h')(\in (G \times H)) = (g \cdot g', h * h')$ eine Gruppe

5.3.1 Identitätsfunktion

TODO

5.3.2 Satz: Eigenschaften von Gruppen

In jeder Gruppe gilt:[5]

a.) $\exists! e \in G$ (Gruppe enthält genau ein neutrales Element)

b.) $\forall a \in G$ gilt $a * e = a$

c.) $\forall a \in G, \exists! a'$ mit $a' * a = e$ (es existieren alle inversen Elemente)

d.) $a' * a = e \Rightarrow a * a' = e$

e.) $a * b = a * c \Rightarrow b = c$ und $b * a = c * a \Rightarrow b = c$

[5] Beweise gab es in der VL, zu finden in den Notizen zu Gruppen im studIP

5.3.3 Definition: Untergruppen

Eine Teilmenge $U \subset G$ einer Gruppe $(G, *)$ heißt *Untergruppe* von G, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- $U \neq \emptyset$
- $a, b \in U \Rightarrow a * b \in U$
- $a \in U \Rightarrow a^{-1} \in U$

5.3.4 Definition: Gruppenhomomorphismus

i) Eine Abbildung $f : G \to H$ zwischen $(G, *)$ und $(H, \circ)$ heißt *Gruppenhomomorphismus*, wenn $\forall a, b \in G$ stets $f(a * b) = f(a) \circ f(b)$ gilt.
ii) Ein bijektiver Gruppenhomomorphismus heißt *Isomorphismus*. Falls $f : G \to H$ ein Isomorphismus ist, schreibt man $f : G \tilde{\to} H$.

5.3.5 Definition: Zyklen

Eine Gruppe heißt *zyklisch*, wenn es ein $g \in G$ gibt, sodass $< g >:= \{g^k | k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, g^{-2}, g^{-1}, e, g^1, g^2, \dots\}$

5.3.6 Satz: Untergruppe von $\mathbb{Z}$

Zu jeder Untergruppe $U \in \mathbb{Z}$ von $(\mathbb{Z}, +) \exists$ ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $U = n\mathbb{Z}$

6 Vektorräume

6.1 Vektorraum

Eine nichtleere Menge V heißt Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$, wenn die folgenden Eigenschaften zutreffen:
Addition

$$(u + v) + w = u + (v + w) \ \forall u, v, w \in V \tag{8}$$
$$u + v = v + u \qquad \forall u, v \in V \tag{9}$$
$$u + 0 = u \qquad \forall u, v \in V \tag{10}$$
$$v + (-v) = 0 \qquad \forall v \in V \tag{11}$$

Skalarmultiplikation:

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v) \tag{12}$$
$$\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v \tag{13}$$
$$(\alpha \cdot \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v) \tag{14}$$
$$1 \cdot v = v \tag{15}$$

6.1.1 Basis

Minimale Menge der Einheitsvektoren[6], mit denen alle anderen Vektoren erzeugt werden können. Die Vektoren untereinander sind linear unabhängig. Beispiel für $\mathbb{R}^2$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

6.2 Untervektorraum

Sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$. Dann ist $U \subset V$ ein Untervektorraum, wenn gilt:

1. U ist nicht leer, also muss mindestens $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$ gelten.
2. Die Addition muss abgeschlossen sein.
3. Die Skalarmultiplikation muss abgeschlossen sein.

6.3 Kombinationen

Voraussetzungen für die nächsten Definitionen: Seien $v_1, \ldots, v_m$ Elemente eines Vektorraums V über einem Skalarenkörper $\mathbb{K}$, und es sei $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ ein m-Tupel aus $\mathbb{K}^m$ für ein $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

6.3.1 Linearkombination

Eine Linearkombination ist eine Vektoraddition, bei der jeder Vektor einer Menge V zunächst mit einem Skalar α multipliziert wird.

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot v_j$$

6.3.2 Affinkombination

Wenn außerdem gilt, dass die Summe aller Koeffizienten 1 ergibt, also

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j = 1$$

dann spricht man von einer *Affinkombination*.

[6] Ein Vektor der Länge Eins, `https://de.wikipedia.org/wiki/Einheitsvektor`

6.3.3 Konvexkombination

Wenn darüber hinaus $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist und

$$\alpha_j \in [0,1] \; \forall j, 1 \leq j \leq m$$

gilt, spricht man von einer *Konvexkombination*. Vergleiche zum Verständnis für Konvex die Definition auf Wikipedia[7]

[7] https://de.wikipedia.org/wiki/Konvexe_Menge